GIMNASIA

CON

GEOMETRÍA

ANALÍTICA

SECRETARIA
DE
EDUCACION PUBLICA

INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR
REGISTRO PUBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

CERTIFICADO

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, 168, 169, 209 fracción III y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTORES:	GUERRERO DE LA ROSA RAFAEL ANGEL PADILLA PINEDA JULIO EDUARDO
TITULO:	GIMNACIA CON GEOMETRIA ANALITICA
RAMA:	LITERARIA
TITULARES:	GUERRERO DE LA ROSA RAFAEL ANGEL PADILLA PINEDA JULIO EDUARDO

Con fundamento en lo establecido por el artículo 14 fracciones I, VI, de la Ley Federal del Derecho de Autor, el presente certificado no ampara las ideas en sí mismas, las fórmulas, soluciones, conceptos, métodos, sistemas, principios, descubrimientos, procesos e invenciones de cualquier tipo; los simples formatos o formularios en blanco para ser llenados con cualquier tipo de información, así como sus instructivos.

Con fundamento en el art. 3° de la Ley Federal del Derecho de Autor el presente certificado ampara única y exclusivamente la obra original literaria

L.F.D.A.- Articulo 168.- Las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

NUMERO DE REGISTRO: **03-2007-060812330800-01**

México D.F., a 6 de julio de 2007
SUFRAGIO EFECTIVO. NO REELECCION
EL SUBDIRECTOR DE REGISTRO DE OBRAS Y CONTRATOS

ARTURO NOE CALDERON AGUILAR

PRESENTACIÓN

Es cierto que no basta que los profesores tengan dominio sobre la materia que imparten frente a grupo para que esto garantice el aprendizaje de sus alumnos, también es necesario que se conviertan en verdaderos facilitadores de este aprendizaje, no obstante la gran complejidad de fenómenos que hay que enfrentar con este propósito, y por esto, se hace urgente la necesidad de sugerir propuestas que se dirijan a dar soluciones para un mejor aprendizaje de las matemáticas en el nivel medio superior.

Tratando de buscar respuestas cercanas a la pregunta: ¿**cómo se puede aprender Geometría Analítica en el bachillerato**?, una respuesta puede ser la siguiente: si consideramos como variable dependiente al aprendizaje y como una de las variables independientes que tienen relación causal con el aprendizaje a la escasa producción de materiales de enseñanza de la materia, que realmente se apeguen a la realidad que vivimos y enfrentamos día a día los docentes frente a grupo.

El material de enseñanza que en este trabajo se propone, es una aportación que trata de contribuir a lo que anteriormente se ha dicho y que trata de conducir y a la vez a estimular al estudiante interactuando con el conocimiento para ejercer los procesos del pensamiento que lo lleven a adquirir, retener y aplicar los conocimientos y habilidades que se proponen.

El plan que se desarrolló para la elaboración de este material cubrió las siguientes etapas:

1. Inventario del contenido
2. Autodiagnóstico
3. Articulación y estructuración del contenido
4. Análisis del contenido a enseñar
5. Como convertir el contenido formal en contenido didáctico
6. Elaboración de los instrumentos de autoevaluación
7. Solución a los ejercicios
8. Apéndice

1. En el inventario del contenido se consideró desarrollar el programa vigente de Matemáticas V que se imparte en la Escuela Nacional Preparatoria de la U.N.A.M., con algunas sugerencias que se hacen, principalmente aquellas que nos permitan cubrir con todo el programa en el tiempo normal del año escolar, dicho inventario consta de once capítulos: I. Relaciones y funciones, II. Funciones trigonométricas, III. Funciones exponenciales y logarítmicas, IV. Sistemas de coordenadas y algunos conceptos básicos, V. Discusión de ecuaciones algebraicas, VI. Ecuación de primer grado, VII. Ecuación general de segundo grado, VIII. La circunferencia, IX. La parábola, X. La elipse, XI. La hipérbola.

2. Con el autodiagnóstico, se consideró de suma importancia que el estudiante domine los conceptos básicos de su curso anterior que le permitan continuidad en sus estudios posteriores y que le permitan también transformar los conocimientos previos en otros de nivel más elevado. El mismo estudiante podrá verificar si cuenta con los conocimientos de Álgebra que le serán necesarios para una mejor comprensión y aplicación de los nuevos conocimientos de Geometría Analítica, con la ventaja de que él mismo pueda saber los temas del Álgebra que deberá reforzar al poder autoevaluarse.

3. En lo que respecta a la articulación y estructuración del contenido de los once capítulos, se consideró de suma importancia la continuidad entre estos, desarrollándolos a partir de una estructura lógica, y en la redacción del contenido se procuró emplear un estilo lo más ligero posible

4. En el análisis del contenido a enseñar nos abocamos a analizar los contenidos de cada unidad temática para ver cómo construir sus componentes que se desarrollarán en cada unidad de tal forma que se puedan exponer en el menor tiempo posible, sin sacrificar contenidos

5. Para convertir el contenido formal en contenido didáctico, previamente se procedió a distinguir aquellos que son conceptos y los que son procedimientos a enseñar, ya que los conceptos constituyen el material teórico, o sea lo que deben saber los estudiantes y los procedimientos que es la parte práctica, es decir, lo que deberán saber hacer, todo esto, se presenta en forma sencilla al alumno (conceptos y habilidades), enlazados armónicamente de la siguiente manera:

   a) Presentación del conocimiento, b) Ejemplos, c) Ejercicios (práctica para la retención del conocimiento), d) Autoevaluación (como retroalimentación de lo aprendido).

      a) En la presentación del conocimiento (**conceptos**), se describen en forma sencilla los atributos esenciales que lo definen.

      b) En cada capítulo y en cada sección se incluyen **ejemplos** que se muestran con la intención de que el estudiante adquiera el dominio del concepto, presentando primero las definiciones, las fórmulas, las secuencias completas de las operaciones que suponen los procedimientos y en algunos casos, se señalan otros métodos o procedimientos alternativos para lograr el mismo resultado.

      c) En los ejercicios, se tiene presente que para que una conducta se aprenda, no es suficiente con realizarla, es necesario llevarla a cabo en forma intencionada ya que la participación activa del que aprende es fundamental para su aprendizaje, los ejercicios que se proponen en todos los capítulos y en todas las secciones se diseñaron esperando que el alumno debe hacer precisamente aquello que se espera que aprenda, y al existir conductas observables que esperan recompensa, estas pueden llegar al estudiante al comprobar que dio una respuesta correcta a determinado ejercicio enterándose de que efectivamente acertó al poder verificar sus respuestas en la sección de solución a los ejercicios.

6. Los instrumentos de autoevaluación constan de reactivos de opción múltiple y aun cuando sabemos que no es de lo mejor para evaluar, estos demandan por lo general el recuerdo de la información y pueden valorar niveles de comprensión y aplicación del conocimiento, se sabe que es posible que por el azar puedan ser contestados correctamente algunos reactivos, sin embargo, la forma en que se propone la autocalificación, trata de evitar esto.

Los alumnos pondrán al descubierto mediante distintos desempeños, la utilización funcional de los aprendizajes logrados y deberán tener presente que el propósito de las autoevaluaciones que se presentan en el texto es exclusivamente informarle sobre sus progresos y pueden aprovechar deducciones valiosas sobre su participación activa en su aprendizaje.

La actividad de aprender a autoevaluarse es relevante en si, por eso es importante que los alumnos aprendan a evaluar el proceso y el resultado de sus propios aprendizajes.

7. La solución a los ejercicios de todo el material se presenta al final del capítulo once, con la finalidad de que el estudiante al conocer los resultados de la propia actividad, favorezca su aprendizaje, en el caso de que su respuesta sea correcta o no, además de confirmarlo, de esta manera la retroalimentación contribuye a modelar la estructura mental que el estudiante va modificando durante su aprendizaje.

AUTODIAGNÓSTICO

DE ANTECEDENTES PARA ESTUDIANTES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Aun cuando se sabe que no es la fórmula mágica un examen escrito como única forma de evaluar a un estudiante, sin embargo, si proporciona ayuda útil tanto para el estudiante como para el profesor también para recoger información sobre determinadas adquisiciones.

Es importante para los estudiantes saber en que medida cumplen con los antecedentes básicos de álgebra que les serán útiles para el desarrollo de los nuevos conocimientos con los que se enfrentarán.

El siguiente es un examen de autodiagnóstico cuyo fin es que el estudiante pueda automedirse en algunos temas de álgebra y pueda darse cuenta de su fortaleza y su debilidad en los temas que se tratan.

Este es un examen de opción múltiple lo deberá resolver el estudiante y tomar en cuenta lo siguiente:

a) Deberá usar lápiz, goma y hojas en blanco para hacer operaciones.

b) No utilizar calculadora.

c) Al final de los 25 reactivos que componen este examen, se proporciona una hoja de respuestas que servirá para que el estudiante circule su respuesta en cada pregunta.

d) Si el estudiante no sabe la respuesta de alguna pregunta, deberá dejarla sin circularla y con esto se evitará que las respuestas correctas se vean afectadas.

e) El estudiante deberá autoevaluarse cuando haya terminado de resolver este examen como se indica en la misma hoja de respuestas.

f) De acuerdo con la calificación obtenida, se recomienda que el estudiante repase los temas donde obtuvo respuestas incorrectas.

g) La solución del examen se localiza en el apartado de “solución de los exámenes”, para que el estudiante compare sus respuestas y pueda autoevaluarse.

EXAMEN DE AUTODIAGNÓSTICO

1) Al reducir la expresión $\frac{2a}{b}+\frac{a}{2b}-\frac{a}{b}+\frac{2a}{3b}$, el resultado es:

A) $\frac{5a}{4b}$ B) $\frac{4a}{7b}$ C) $\frac{13a}{6b}$ D) $\frac{15a}{5b}$

2) El valor de la expresión $\frac{x^2+y^2}{z^2}-w^2$, cuando $x=3$, $y=-2$, $z=1$ y $w=-2$ es:

A) 9 B) 8 C) 10 D) 11

3) Al suprimir paréntesis en: $4x+[x-(2x-3)]-[5-2(1-x)]$, el resultado es:

A) $-x$ B) x C) $2x$ D) $-2x$

4) El producto $(x-3)(x+1)$ es igual a:

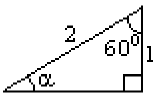
A) x^2-3x-2 B) x^2-2x+3 C) x^2-3x-3 D) x^2-2x-3

5) El resultado de la división $\frac{4x^2-4x-3}{2x-3}$ es:

A) $2x-2$ B) $2x+2$ C) $2x-1$ D) $2x+1$

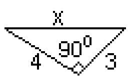
6) Al simplificar la expresión: $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}}$ el resultado es:

A) $a^{-\frac{1}{12}}$ B) $a^{\frac{5}{7}}$ C) $a^{-\frac{2}{3}}$ D) $a^{\frac{1}{2}}$

7) En el triángulo rectángulo 

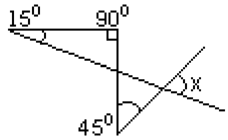
¿cuál es el valor de $\tan\alpha$?

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\sqrt{3}$

8) Con los datos de la figura, el valor de x es: 

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

9) En la siguiente figura el valor de x es:



A) 40° B) 50° C) 60° D) 70°

10) La simplificación del radical $\sqrt{24x^5}$ es igual a:

A) $2x\sqrt{6x}$ B) $2x^2\sqrt{6x}$ C) $2x^3\sqrt{6x}$ D) $2x^4\sqrt{6x}$

11) Al efectuar la operación $\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{150}$, el resultado es:

A) $3\sqrt{6}$ B) $4\sqrt{6}$ C) $5\sqrt{6}$ D) $6\sqrt{6}$

12) Al racionalizar el denominador de $\frac{4}{\sqrt{2}}$, el resultado es:

A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 4 D) $\sqrt{2}$

13) Al desarrollar la expresión $(2x-4)^2$, el resultado es:

A) $4x^2-16x-16$ B) $4x^2+16x+16$ C) $4x^2-16x+16$ D) $4x^2+16x-16$

14) El máximo común divisor (m.c.d.) de $15x^3$, $25x^4$ y $30x^2$ es:

A) $5x^3$ B) $5x^2$ C) $5x^4$ D) $5x$

15) La factorización completa de $6x^2y-4xy^2+10xy$ es:

A) $2xy(3x-2y-5)$ B) $2xy(3x-2y+5)$ C) $2xy(3x+2y+5)$ D) $2xy(3x+2y-5)$

16) Al factorizar $4x^2-y^2$, el resultado es:

A) $(2x-y)(2x+y)$ B) $(2x-y)(2x-y)$ C) $(2x+y)(2x+y)$ D) $(x-y)(2x+y)$

17) La factorización de $6x^2-5x-6$, es igual a:

A) $(2x-3)(3x+2)$ B) $(2x+3)(3x+2)$ C) $(2x-3)(3x-2)$ D) $(2x+3)(3x-2)$

18) Al efectuar las operaciones indicadas y simplificar la expresión $\frac{x}{y}-\frac{3x}{2y}+\frac{2x}{5y}$ el resultado es:

A) $\frac{x}{10y}$ B) $\frac{10y}{x}$ C) $\frac{-x}{10y}$ D) $-\frac{10y}{x}$

19) Al efectuar el producto $\frac{9x^2}{4y^3} \cdot \frac{2y^2}{x}$ y simplificar, el resultado es:

A) $\frac{9x^2}{4y}$ B) $\frac{9x}{4y}$ C) $\frac{9x^2}{2y^2}$ D) $\frac{9x}{2y}$

20) Al resolver la ecuación $9x = 2 - 7x$, el resultado es:

A) $x = \frac{1}{6}$ B) $x = \frac{1}{7}$ C) $x = \frac{1}{8}$ D) $x = \frac{1}{9}$

21) El resultado de la ecuación $\frac{x-1}{x-3} = \frac{3}{4}$ es:

A) $x = 2$ B) $x = -3$ C) $x = 4$ D) $x = -5$

22) Al despejar la variable "y" de $x = 5 + (n-1)y$, el resultado es:

A) $y = \frac{5-x}{n-1}$ B) $y = \frac{x-5}{n-1}$ C) $y = \frac{x+5}{n-1}$ D) $y = \frac{x-5}{1-n}$

23) La solución del sistema de ecuaciones $\begin{array}{c} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{array}$ es:

A) $x = -1,\ y = 2$ B) $x = 1,\ y = -2$ C) $x = -1,\ y = -2$ D) $x = 1,\ y = 2$

24) Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{array}{c} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{array}$, el resultado es:

A) $x = -1,\ y = 1,\ z = 1$ B) $x = 1,\ y = -1,\ z = 0$ C) $x = 5,\ y = 1,\ z = 1$ D) $x = 5,\ y = -1,\ z = 1$

25) Al resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + 5x + 6 = 0$, aplicando la fórmula general

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, los valores de a, b y c respectivamente son:

A) $5, 6, 1$ B) $1, 5, 6$ C) $6, 5, 1$ D) $1, 6, 1$

HOJA DE RESPUESTAS DEL AUTODIAGNÓSTICO DE ANTECEDENTES PARA ESTUDIANTES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

En cada pregunta tacha la opción que para ti es correcta, si no sabes la respuesta no taches nada y continua. Para obtener tu calificación cuando hayas terminado, aplica la siguiente fórmula, la cual trata de evitar el éxito casual:

$$Calificación = \left[N° \ de \ respuestas correctas - \frac{N° \ de \ incorrectas}{3} \right](4)$$

Una pregunta no contestada (en blanco) no cuenta como incorrecta.

Un ejemplo: $Calif. = \left[20 - \frac{2}{3} \right](4) = 77$

1	A	B	C	D
2	A	B	C	D
3	A	B	C	D
4	A	B	C	D
5	A	B	C	D
6	A	B	C	D
7	A	B	C	D
8	A	B	C	D
9	A	B	C	D
10	A	B	C	D
11	A	B	C	D
12	A	B	C	D
13	A	B	C	D
14	A	B	C	D
15	A	B	C	D
16	A	B	C	D
17	A	B	C	D
18	A	B	C	D
19	A	B	C	D
20	A	B	C	D
21	A	B	C	D
22	A	B	C	D
23	A	B	C	D
24	A	B	C	D
25	A	B	C	D

ÍNDICE

Página

SISTEMAS DE COORDENADAS Y ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS

IV

DISCUSIÓN DE ECUACIONES ALGEBRÁICAS

V

Página

LA PARÁBOLA

IX

LA ELIPSE

X

LA HIPÉRBOLA

XI

Página

I. RELACIONES Y FUNCIONES

Objetivos: Que el alumno:

1. Explique con sus propias palabras de manera correcta el producto cartesiano de dos conjuntos no vacios.
2. Conociendo dos conjuntos no vacios, sea capaz de determinar su producto cartesiano.
3. Sea capaz de distinguir entre lo que es una relación y una función.
4. Dada la representación algebraica de una función, sea capaz de obtener su equivalente en cualquiera de las formas tabular, gráfica o verbal.
5. Dada una relación, sea capaz de distinguir si es implícita o explícita.
6. Determine el dominio y el rango de una función.
7. Pueda describir cuando una función es inyectiva, suprayectiva, biyectiva o ninguna de las anteriores.
8. Dada una función, sea capaz de determinar su inversa.

PAREJAS ORDENADAS

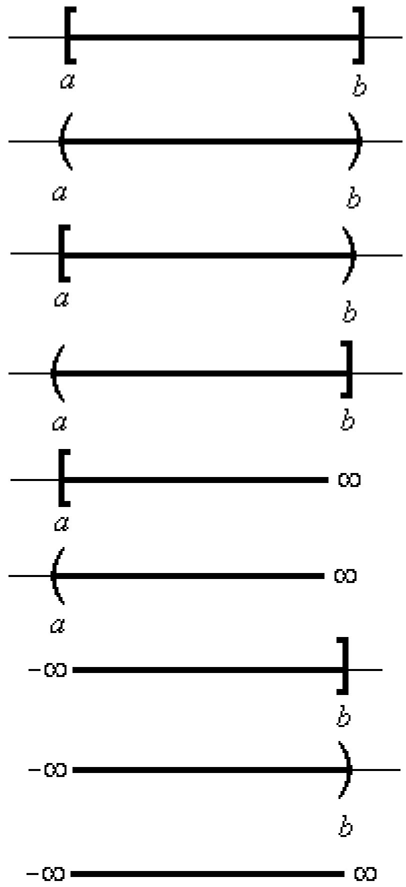
Una pareja ordenada se compone de dos elementos "x" y "y", escribiéndose (x, y) donde "x" es el primer elemento y "y" el segundo elemento. Teniéndose que dos parejas ordenadas (x, y) y (z, w) serán iguales si $x = z$ y $y = w$.

1.1. PRODUCTO CARTESIANO

Definición:

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B (se simboliza AxB) es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y), tales que "x" pertenece al primer conjunto A y "y" pertenece al segundo conjunto B, es decir: $AxB = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$

<u>Nota:</u> Se da por hecho, que el estudiante recuerda el conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ y su representación sobre una línea recta, así como los intervalos de números reales:



a) Cerrado ; $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

b) Abierto ; $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

c) Cerrado - Abierto ; $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

d) Abierto - Cerrado ; $(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

e) Cerrado - Infinito ; $[a,\infty)=\{x|x\ge a\}$

f) Abierto - Infinito ; $(a,\infty)=\{x|x>a\}$

g) Infinito - Cerrado ; $(-\infty,b]=\{x|x\le b\}$

h) Infinito - Abierto ; $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$

i) Los reales ; $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$

EJEMPLOS

1) Con los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{a,b\}$, obtener los productos cartesianos AxB y BxA

<u>Solución</u>

$A=\{1,2,3\}$
$B=\{a,\ b\}$

Si el conjunto A tiene 3 elementos y el conjunto B tiene 2 elementos, entonces el producto cartesiano AxB y el BxA tendrán $3x2=6$ elementos (parejas ordenadas).

$$AxB=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

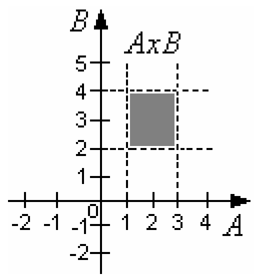
$$BxA=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

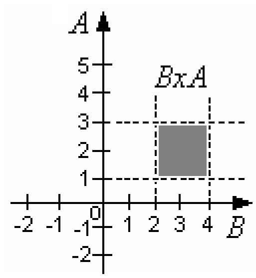
Véase que $AxB\neq BxA$, esto es, el producto cartesiano no es conmutativo

2) Sean los intervalos abiertos $A=(1,3)$ y $B=(2,4)$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, obtener los productos cartesianos AxB y BxA.

<u>Solución</u>

En este caso el conjunto $A=(1,3)$, corresponde al intervalo abierto de todos los números reales comprendidos entre 1 y 3, y el conjunto $B=(2,4)$, corresponde también al intervalo abierto de todos los números reales entre 2 y 4, por consiguiente, AxB y BxA tendrán un número infinito de elementos (parejas ordenadas) y sólo los representaremos gráficamente como se muestra a continuación, representando los elementos del primer conjunto sobre el eje horizontal y los del segundo sobre el eje vertical.



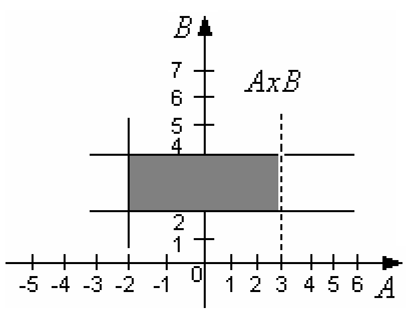


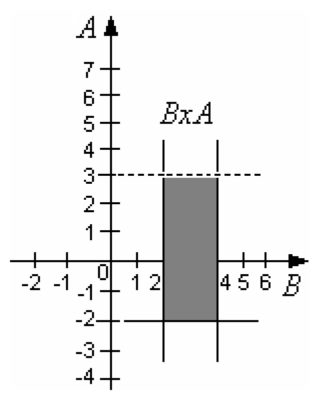
Obsérvese que las líneas punteadas indican que no se incluye la frontera de la región que representa AxB y BxA, por ser intervalos abiertos de números reales, que no incluyen los extremos del intervalo tanto el conjunto A como el B.

3) Sean $A=[-2,3)$ y $B=[2,4]$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, obtener el producto cartesiano AxB y BxA

Solución

En los intervalos $A=[-2,3)$ y $B=[2,4]$, el corchete indica que se debe incluir el extremo de dicho intervalo, por lo que en las gráficas que indican este producto cartesiano, si se incluye la frontera donde es cerrado dicho intervalo, como se muestra a continuación:

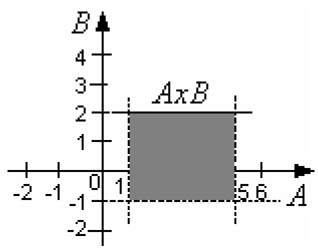


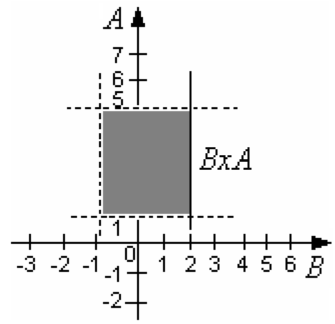


4) Para $A=\{x\in\mathbb{R}/1<x<5\}$ y $B=\{y\in\mathbb{R}/-1<y\le 2\}$, obtener el producto cartesiano AxB y BxA

Solución

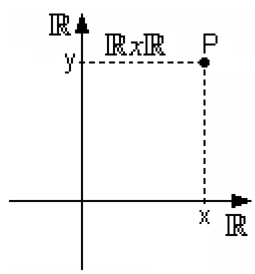
El conjunto A y B es otra forma de representar a los intervalos de estos conjuntos de números reales, lo cual es $A=\{x\in\mathbb{R}/1<x<5\}=(1,5)$ y $B=\{y\in\mathbb{R}/-1<y\le 2\}=(-1,2]$.





5) El producto cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ genera todo el plano cartesiano, donde cada punto "P" del plano representa un par ordenado (x, y) de números reales, trazando una recta vertical por el punto "P" hasta cortar al eje horizontal en "x" y una recta horizontal por "P" hasta cortar al eje vertical en "y".

Solución



EJERCICIOS

1) Sea $A = \{-2,0,3,7\}$ y $B = \{1,2,3\}$, obtener el producto cartesiano AxB y BxA y dibujar su gráfica.

2) Sea $T = \{1,2,3,4,5\}$ y $S = \{1,2\}$, obtener el producto cartesiano TxS y SxT y graficarlos.

3) Con $A = [-1,2)$ y $B = (-3,2)$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, obtener el producto cartesiano AxB y BxA y graficarlos.

4) Si $K = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 1\}$ y $J = \{y \in \mathbb{R} / 1.5 < y < 5.5\}$, obtener el producto cartesiano KxJ y JxK.

5) Con $\mathbb{R}$ y $A = [2,4]$, obtener $\mathbb{R}xA$ y $Ax\mathbb{R}$.

1.2. RELACIONES

Variable es costumbre representarla mediante alguna de las últimas letras del alfabeto, con la característica de que puede sustituirse en su lugar cualquier número real.

Constante es un valor real que permanece fijo en cualquier problema de aplicación matemática.

Definición:

Una relación en los reales es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida $A \subseteq \mathbb{R}$ (llamado Dominio de la relación) uno o más números reales "y" de un conjunto de llegada $B \subseteq \mathbb{R}$ (llamado Contradominio).

El papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento es fundamental, de ahí que una relación puede tener varias representaciones, en forma verbal, algebraica, numérica o de tabla y gráfica. Para ilustrar esto, se utiliza el mismo ejemplo en cada representación:

1) **En forma verbal:**
Se describe la relación en lenguaje materno lo más precisa posible para poderla escribir, como por ejemplo, "un número real "y" es igual al cuadrado de otro número "x" más una unidad".

2) **En forma de ecuación algebraica:**
$y = x^2 + 1$

3) **En forma numérica o de tabla:**

Es un arreglo que puede ser en forma horizontal o vertical y en donde en el primer renglón o primera columna, se ubican algunos valores reales del primer número "x" y en el segundo renglón o columna se ubican los valores del número "y" (que con la ayuda del inciso **2)** se puede obtener).

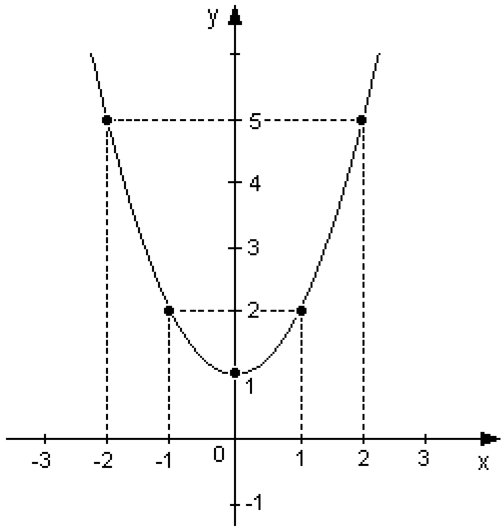
Nota: Por facilidad de cálculo se usaron en este caso sólo algunos números enteros, pero debe tenerse presente que los valores asignados a "x" pueden ser cualquier número real, y además, una tabla solo nos proporciona una parte de la relación.

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

x	y
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

4) **En forma gráfica:**
En esta representación, puede aplicarse el método que consiste en aprovechar los resultados de los incisos **2)** y **3)** anteriores, localizando sobre el plano cartesiano los puntos obtenidos en la tabla del inciso **3)** y uniéndolos con línea continua como se muestra, se obtiene un bosquejo de la relación, que sólo es una parte de la gráfica ya que entre mayor sea el número de puntos calculados en la tabla, el trazo de la gráfica

será mejor. Algunas veces este método del punto puede conducir a errores si no son elegidos correctamente los valores que son asignados a la variable "x".



Nota: Se usa con mayor frecuencia cualquiera de las últimas tres representaciones y eventualmente la primera cuando se trata de resolver problemas.

EJERCICIOS

Con la representación dada, obtenga la representación solicitada en cada uno de los siguientes ejercicios:

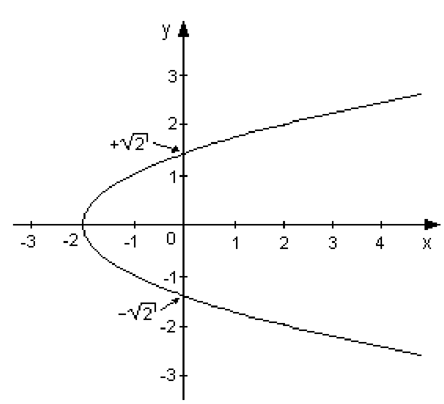
1) Con la representación algebraica $y = x$, obtenga su equivalente representación tabular con al menos 3 valores para "x".

2) Con la representación algebraica $y = x$, obtenga su equivalente representación gráfica (utilice el resultado del inciso anterior).

3) Con la representación algebraica $y = \sqrt{x}$, escriba su equivalente representación verbal.

4) Con la escritura de la siguiente representación verbal: "El cuadrado de un número "y" es igual a 4 menos el cuadrado de otro número "x"", encuentre su equivalente representación algebraica.

5) Con la representación gráfica que se muestra, obtenga una tabla de valores para cuando "x" toma los valores de $-2, -1, 0$ y 2.



6) Con la escritura de la siguiente representación verbal, “el cuadrado de un número “ y ” es igual a otro número “ x ” más dos”, encuentre su equivalente representación algebraica.

Relaciones Implícitas y Explícitas

Una relación implícita expresada en forma algebraica, es aquella en donde no está despejada ninguna de sus variables, y es explícita cuando alguna de sus variables si esta despejada.

EJEMPLOS

Dadas las siguientes relaciones implícitas, expresarlas en su forma explícita.

1) $x^2 + y^2 = 9$

2) $2x - 3y = 1$

3) $x^2 y + y = x + 1$

4) $x^3 + 2x^2 - 2y^2 = y$

5) $\dfrac{2x - 3xy + 5y}{x+1} = 2$

<u>Solución</u>

Es costumbre llamar a la “ x “ variable independiente (v.i.) y a la “ y “ variable dependiente (v.d.) y generalmente, esta última es la variable que se despeja para obtener la forma explícita de una relación.

1) $x^2 + y^2 = 9$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

2) $2x - 3y = 1$

$$-3y = 1 - 2x$$

$$y = \frac{1-2x}{-3}$$

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x$$

3) $x^2 y + y = x + 1$

$$\left(x^2 + 1\right)y = x + 1 \quad \text{Factorizando}$$

$$y = \frac{x+1}{x^2 + 1}$$

4) $x^3 + 2x^2 - 2y^2 = y$

$$2y^2 + y - x^3 - 2x^2 = 0$$

Por fórmula general de 2° grado en “ y ”

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad a = 2;\ b = 1;\ c = -x^3 - 2x^2$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)\left(-x^3 - 2x^2\right)}}{2(2)}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8x^3 + 16x^2}}{4}$$

5) $\dfrac{2x-3xy+5y}{x+1}=2$

$2x-3xy+5y=2(x+1)$

$2x-3xy+5y=2x+2$

$-3xy+5y=2x+2-2x$

$-3xy+5y=2$

$-y(3x-5)=2$

$-y=\dfrac{2}{(3x-5)}$

$(-1)(-y)=(-1)\left[\dfrac{2}{(3x-5)}\right]$

$y=\dfrac{-2}{3x-5}$

EJERCICIOS

Dadas las siguientes relaciones implícitas, expresarlas en su forma explícita.

1) $y^2-3x-6y+8=0$

2) $3x-2y+5=0$

3) $9xy-3y-6x-12=0$

4) $4x^2+6xy+\dfrac{2x^2}{5}=18-4xy$

5) $-8x=x^2+2xy$

1.3. FUNCIONES

Las funciones pertenecen a las relaciones, por lo que cualquier función es relación, pero no cualquier relación es función, por lo siguiente:

Definición:

Una función real de variable real, es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida $A\subseteq\mathbb{R}$ un único número real "$f(x)$" de un conjunto de llegada $B\subseteq\mathbb{R}$.

Una regla de correspondencia de una función real de variable real generalmente se da por medio de una o más fórmulas matemáticas y se representa con $f(x)$.

El conjunto de partida A es el **dominio** de la función, el conjunto de llegada B se le llama **codominio** o **contradominio** y al conjunto de los elementos "$f(x)$" de B se llama **rango** o **imagen** de la función.

Notación:

Algunas formas de denotar algebraicamente la regla de correspondencia en una función, pueden ser las siguientes: $y = f(x)$, $(x, f(x))$, $f : A \to B$, $p = f(q)$, etc.

En el orden, la simbología anterior se lee: "y es igual a efe de x", "el conjunto de pares ordenados x, efe de x", "efe es una función de A en B", "p es función de q".

EJEMPLOS

Con las siguientes expresiones determine cuál es función y cuando lo sea exprésela en diferente notación.

1) $3x^2 + 6y^2 = 18$

2) $2x + 4y - 1 = 3 + y$

3) $y^3 + 2x^2 = x - 1$

4) $xy + 2x - 1 = x^2$

5) $sen^2 x + \cos^2 x = y + 2x$

Solución

1) $3x^2 + 6y^2 = 18$

Despejando "y" se tiene: $6y^2 = 18 - 3x^2$

$$y^2 = \frac{18 - 3x^2}{6} = 3 - \frac{1}{2}x^2 \qquad ; \qquad y = \pm\sqrt{3 - \frac{1}{2}x^2}$$

Esta última expresión nos indica que para cada valor que se pueda asignar a la variable "x", se obtienen dos valores para la variable "y", lo cual se contrapone con la definición de función y por lo tanto es una **relación**.

2) $2x + 4y - 1 = 3 + y$

Procediendo de la misma manera: trasladando las "y" al primer miembro y los términos que no contienen a "y" al segundo miembro: $4y - y = 3 + 1 - 2x$

Simplificando: $3y = -2x + 4$, despejando a la $y = \frac{-2x + 4}{3}$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

Esta última expresión es una **función**, ya que para cada valor asignado a la variable "x", se obtiene uno solo para la variable "y", lo cual cumple con la definición. Diferentes formas de expresarla en el orden anterior son:

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$, $\left(x,-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donde $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$, $p=-\frac{2}{3}q+\frac{4}{3}$

3) $y^3+2x^2=x-1$

$y^3=-2x^2+x-1$; $y=\sqrt[3]{-2x^2+x-1}$

Esta última expresión es una **función**, ya que para cada valor asignado a la v.i. "x" se obtiene uno solo para la variable "y" (v.d.), otras representaciones son:

$y=\sqrt[3]{-2x^2+x-1}$, $\left(x,\sqrt[3]{-2x^2+x-1}\right)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donde $f(x)=\sqrt[3]{-2x^2+x-1}$

$p=\sqrt[3]{-2q^2+q-1}$

4) $xy+2x-1=x^2$

$xy=x^2-2x+1$; $y=\frac{x^2-2x+1}{x}$; $y=x-2+\frac{1}{x}$

Esta última expresión es una **función**, ya que para cada valor asignado a "x" se obtiene uno solo para la variable "y", otras representaciones son:

$y=x-2+\frac{1}{x}$, $\left(x,x-2+\frac{1}{x}\right)$, $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ donde $f(x)=x-2+\frac{1}{x}$, $p=q-2+\frac{1}{q}$

5) $sen^2x+\cos^2x=y+2x$

Por la identidad trigonométrica Pitagórica, $sen^2x+\cos^2x=1$, se tiene:

$1=y+2x$

$y=1-2x$, **es función**, sus representaciones son:

$y=1-2x$, $(x,1-2x)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donde $f(x)=1-2x$, $p=1-2q$

EJERCICIOS

Con las siguientes expresiones determine cuál es función y cuando lo sea exprésela en diferente notación.

1) $xy=1$

2) $x^2+y^2-2xy-1=0$

3) $\log x^y=4$

4) $3x^2+3y^2=6$

5) $x^2+y\cos 2x=4$

1.4. DOMINIO Y RANGO

En las funciones reales de una variable real, con frecuencia solo se da la regla de correspondencia en forma de ecuación algebraica $y = f(x)$, sin especificar cual es su Dominio, dando lugar esto a obtener lo que se conoce como Dominio natural de una función.

Definición:

Dominio natural de una función real de variable real, son todos los valores reales que puede asignársele a la "x" (v.i.), de tal modo que la "y" (v.d.) resulte un único número real.

Rango o Imagen de una función real de variable real, son todos los valores reales que se obtuvieron para "y" (v.d.) a través de su regla de correspondencia $f(x)$.

Notación: El dominio se representará con la letra "D" y el rango o imagen con la letra "R".

EJEMPLOS

Obtener el Dominio natural y el Rango de las siguientes funciones reales de variable real dadas por su regla de correspondencia.

1) $f(x) = 2x - 5$

2) $f(x) = 3 + \frac{2}{x}$

3) $f(x) = -4\sqrt{5 - 2x}$

4) $f(x) = 2x^2 + 6x$

5) $f(x) = 2\ln(x-2) + 1$

Solución

1) $f(x) = 2x - 5$

Observe que en este ejemplo, la función es un polinomio de primer grado, donde la variable "x" puede tomar cualquier número real sin problema para que la variable "y" resulte también un número real, por lo que el dominio y el rango son respectivamente todos los reales, o sea: $D = \mathbb{R}$ y $R = \mathbb{R}$, recordar que $y = f(x)$.

2) $f(x) = 3 + \frac{2}{x}$

Cuando una función contiene una fracción como en este ejemplo $\frac{2}{x}$, el dominio quedará restringido para aquellos números reales que anulen el denominador (en este caso, cuando

$x=0$) por lo que $D=\mathbb{R}-\{0\}$ lo cual también se puede escribir como unión de intervalos, o sea $D=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Por lo que respecta a la obtención del rango, de la función original podemos despejar la "x", $x=\dfrac{2}{y-3}$ observando que la "y" puede tomar cualquier número real excepto el 3 por lo que $R=\mathbb{R}-\{3\}$ ó también $R=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$.

3) $f(x)=-4\sqrt{5-2x}$

Cuando una función contiene radicales con índice par como en este ejemplo, deberá tenerse cuidado que en el subradical $5-2x$ la variable "x" no podrá tomar valores reales que hagan que $5-2x$ sea negativo, esto nos obliga a que $5-2x\geq 0$ (el subradical sea no negativo). Resolviendo esta última desigualdad, se tiene $5\geq 2x$ ó $2x\leq 5$, $x\leq\dfrac{5}{2}$ este resultado nos indica que la variable "x" puede tomar cualquier valor real menor o igual a $\dfrac{5}{2}$, por lo que $D=\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$. Para la obtención del rango, podemos razonar de la siguiente manera:

* Observando la función original $f(x)=-4\sqrt{5-2x}$, una vez que ya determinamos el dominio de esta función, se tiene que el radical siempre será no negativo $\sqrt{5-2x}\geq 0$.

* El coeficiente -4 convierte en negativo o cero a todos los valores del radical, por lo que el rango de esta función serán todos los números reales menores o iguales que cero, o sea $R=(-\infty,0]$.

4) $f(x)=2x^2+6x$

Esta función es un polinomio de segundo grado y por la misma razón que en el ejemplo **1)**, tanto su dominio y rango son todos los números reales. Podemos decir que siempre que tengamos una función polinomial, su dominio y rango son todos los números reales.

$$D=(-\infty,\infty) \quad ; \quad R=(-\infty,\infty)$$

o bien $D=\mathbb{R}$; $R=\mathbb{R}$

5) $f(x)=2\ln(x-2)+1$

Se sabe que el argumento de un logaritmo no puede ser negativo ni cero, por lo que se obliga que $x-2>0$ resultando que $x>2$ entonces el dominio son todos los números reales mayores estrictamente que 2 o sea $D=(2,\infty)$.

Con respecto de su rango, despejando a la variable "x" se obtiene $y=2\ln(x-2)+1$; $\frac{y-1}{2}=\ln(x-2)$. Por definición de logaritmo se tiene: $e^{\frac{y-1}{2}}=(x-2)$; $x=e^{\frac{1}{2}(y-1)}+2$.
En esta última expresión observamos que la variable "y" puede tomar cualquier valor real, resultando que la "x" sea mayor que 2, por lo que el rango es $R=(-\infty,\infty)$.

EJERCICIOS

Obtener el Dominio natural y el Rango de las siguientes funciones reales de variable real dadas por su regla de correspondencia.

1) $2x+3y+1=0$

2) $f(x)=2(x-1)^2+3$

3) $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}$

4) $f(x)=2\ln(x^2+2)-1$

5) $f(x)=4x^2+4x+1$

1.5. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Definición:

La gráfica de una función real de variable real puede representarse por el conjunto de puntos del plano (x,y) cuyas coordenadas cumplen que la variable "x" pertenece al Dominio de la función y la $y=f(x)$.

- ❖ La gráfica de una función real de variable real es uno de los subconjuntos del producto cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$.
- ❖ Los puntos (x,y) que forman la gráfica de la función son todos aquellos que su primera coordenada "x" es elemento del Dominio y su segunda coordenada "y" es la imagen correspondiente de esa "x" aplicando la regla de correspondencia $f(x)$.
- ❖ Cuando se grafica una función, y su Dominio es todo el conjunto de los números reales, se recomienda dar algunos valores negativos, el cero y algunos positivos a la v.i. "x" para obtener los correspondientes valores de la v.d. "y", después se representan sobre el plano coordenado cartesiano y mediante línea continua uniendo estos puntos se obtiene solo una parte de la gráfica de la función.
- ❖ En adelante, siempre trataremos con funciones reales de variable real y solo las mencionaremos como funciones, a la vez, indistintamente escribiremos su regla de

correspondencia como por ejemplo $y=2x^2+2$ o bien $f\left(x\right)=2x^2+2$ y diremos Dominio en vez de Dominio natural.

Nota: Entre más puntos se calculen, más idea se tendrá de la gráfica y más adelante se aprenderán formas más eficientes de trazar gráficas de funciones.

EJEMPLOS

1) $y=\frac{1}{2}x^2+4x-3$

2) $y=2\sqrt{x-1}+1$

3) $y=\frac{-2}{x+1}+1$

4) $y=2e^{x+1}+1$

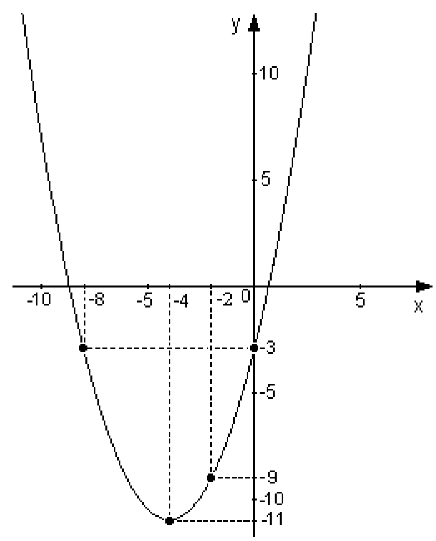
5) $y=2senx$

Solución

1) $y=\frac{1}{2}x^2+4x-3$

Como el dominio de esta función son todos los reales $D=\left(-\infty,\infty\right)$ tabulamos algunos números como se muestra:

x	y
-8	-3
-4	-11
-2	-9
0	-3
4	21



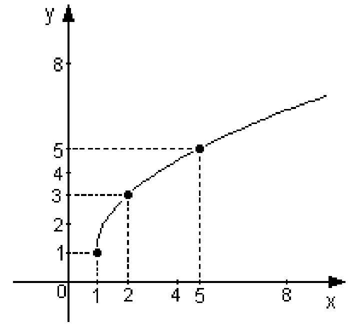
Localizando estos puntos en el plano coordenado
y uniéndolos con línea continua dibujamos solo una parte de la gráfica.

2) $y=2\sqrt{x-1}+1$

Como el dominio de esta función son todos los reales desde 1 hasta infinito, o sea:
$D=\left[1,\infty\right)$, tabulamos algunos números como se muestra:

x	y
1	1
2	3
5	5

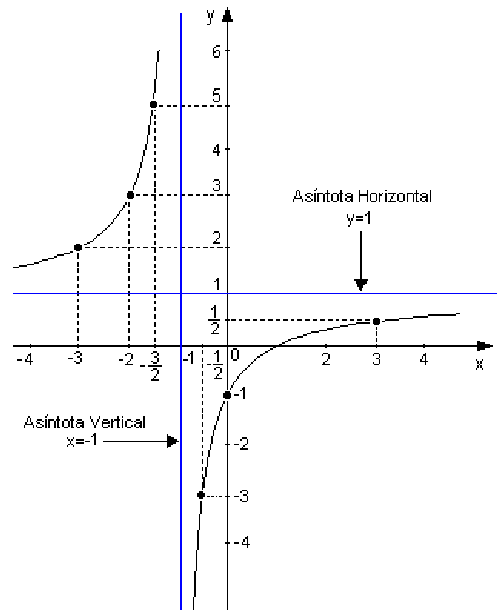
Localizando estos puntos en el plano coordenado y uniéndolos con línea continua trazamos su gráfica.



3) $y = \dfrac{-2}{x+1} + 1$

El dominio de esta función son todos los reales excepto el -1, como sigue: $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ o bien $D = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, tabulando algunos números como se muestra:

x	y
-3	2
-2	3
$-\frac{3}{2}$	5
$-\frac{1}{2}$	-3
0	-1
3	$\frac{1}{2}$



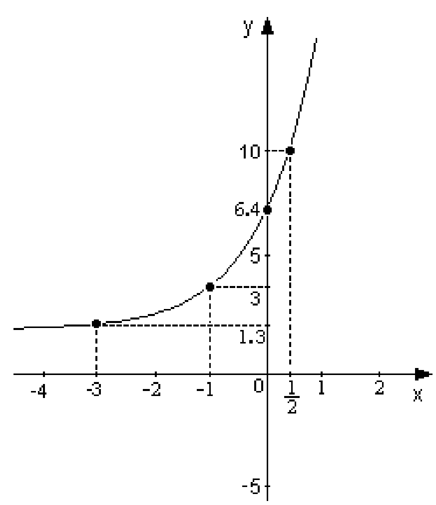
Localizando estos puntos en el plano coordenado y uniéndolos con línea continua trazamos su gráfica.

Nota: Obsérvese que en la gráfica de esta función, las <u>rectas</u> $y = 1$ y $x = -1$ son <u>asíntotas</u> de la curva, conceptos que más adelante se tratarán con detalle.

4) $y = 2e^{x+1} + 1$

Como el dominio de esta función son todos los reales $D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ tabulamos algunos números como se muestra:

x	y
-3	1.3
-1	3
0	6.4
$\frac{1}{2}$	10

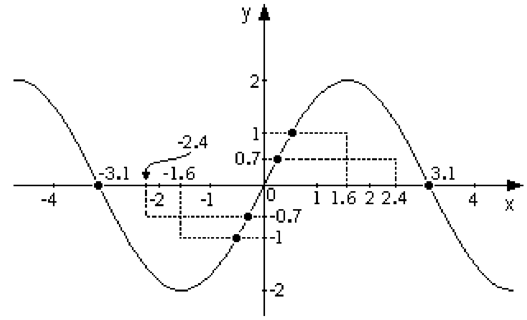


Localizando estos puntos en el plano coordenado y uniéndolos con línea continua trazamos la gráfica.

5) $y = 2senx$

Como el dominio de esta función son todos los reales $D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, tabulamos algunos números como se muestra:

x	y
-3.1	0
-2.4	-0.7
-1.6	-1
1.6	1
2.4	0.7
3.1	0



Localizando estos puntos en el plano coordenado y uniéndolos con línea continua trazamos la gráfica.

EJERCICIOS

1) $y = 3x^2 + x - 1$

2) $y = 2e^{-x+1}$

3) $y = \sqrt{4x + 4}$

4) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$

5) $y = \dfrac{1}{2}\cos(3x)$

1.6. FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

Inyectivas. Sean las funciones que, a elementos distintos del Dominio, les corresponden elementos distintos del Codominio y recíprocamente, por ejemplo $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$.
(Todo o solo una parte del Codominio es el rango de la función).

Suprayectivas. Son las funciones que, si todo elemento del Codominio es imagen de por lo menos un elemento del Dominio. Por ejemplo $y = x^3 + x^2$ (todo el Codominio es el rango de la función).

Biyectivas. Si una función cumple con ser inyectiva y suprayectiva, entonces es biyectiva y su regla de correspondencia es biunívoca o uno a uno. Describiendo esta clase de función en su forma gráfica significa que trazando tanto rectas verticales como horizontales por todo su dominio y todo su rango respectivamente, solo se cruzará un solo punto de la gráfica de la función.

Visualizar una función en forma gráfica es de gran ayuda en matemáticas y en cualquier otra rama de la ciencia ya que puede ser la clave para la solución de problemas y para su estudio en general.

EJEMPLOS

Trazar la gráfica de las siguientes funciones y decir si son inyectivas, suprayectivas, biyectivas o ninguna de las anteriores:

1) $f(x)=x^2+3$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

2) $f(x)=-2x+4$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{x-1}$; $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$; $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$

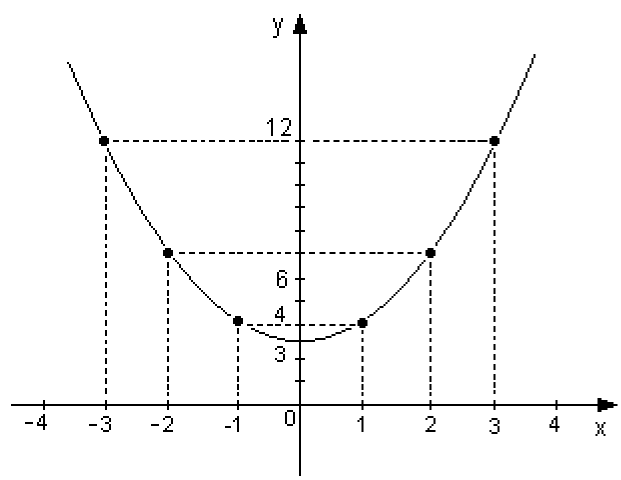
5) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$

<u>Solución</u>

1) $f(x)=x^2+3$

Como el Dominio de la función es el conjunto de los números reales: $D=(-\infty,\infty)$. De acuerdo con la recomendación anterior, se eligen algunos números reales, negativos, el cero y positivos (por facilidad de cálculo sólo se utilizarán números enteros).

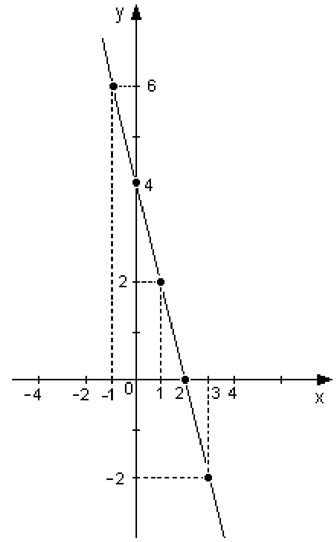
x	y
-3	12
-2	7
-1	4
0	3
1	4
2	7
3	12



Ubicando cada punto de la tabla anterior sobre el plano coordenado y uniendo estos puntos con línea continua se obtiene la gráfica como se muestra arriba.

Esta función no cumple con ninguna de las definiciones anteriores de ser inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

2) $f(x) = -2x + 4$



El Dominio es $D = (-\infty, \infty)$ y el Rango es $R = \mathbb{R}$

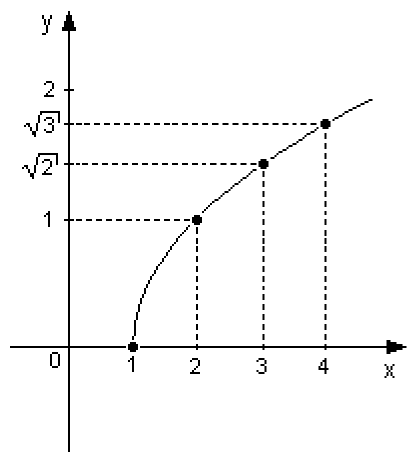
x	y
-1	6
0	4
1	2
2	0
3	-2

Esta función cumple con ser inyectiva, suprayectiva y por lo tanto es biyectiva.

3) $f(x) = \sqrt{x-1}$

El Dominio es: $D = [1, \infty)$ y el Rango $R = [0, \infty)$

x	y
1	0
2	1
3	$\sqrt{2}$
4	$\sqrt{3}$
5	2

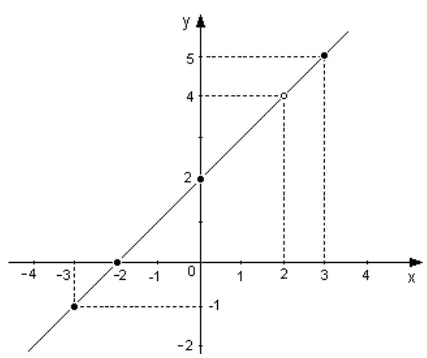


Esta función es inyectiva.

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

El Dominio es: $D = \mathbb{R} - \{2\}$ o bien $D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ y el Rango $R = \mathbb{R} - \{4\}$

x	y
-3	-1
-2	0
0	2
2	4
3	5

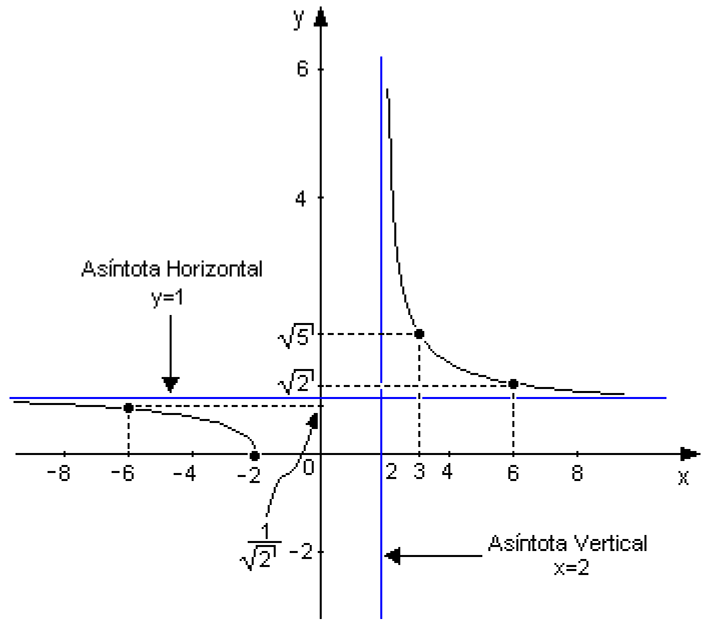


Es una función inyectiva.

5) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Como el Dominio de la función es $D=(-\infty,-2]\cup(2,\infty)$. De acuerdo con la recomendación anterior, se eligen algunos números reales, negativos y positivos (en este caso no se dio el valor de 2 a "x", porque no existe el valor de "y").

x	y
-6	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
-2	0
3	$\sqrt{5}$
6	$\sqrt{2}$



Esta función es inyectiva.

EJERCICIOS

Trazar la gráfica de las siguientes funciones y decir si son inyectivas, suprayectivas, biyectivas o ninguna de las anteriores:

1) $f(x)=-2(x+1)^2-3$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$; $f:\mathbb{R}-\{2\}\to[3,\infty)$

3) $f(x)=\sqrt{4x-4}$; $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$

4) $f(x)=2(x-2)+2$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

5) $f(x)=x^2$; $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

1.7. FUNCIÓN INVERSA

Definición:

Si $f(x)$ representa una función inyectiva o biyectiva, entonces su inversa es la función $f^{-1}(x)$ si se cumple con la siguiente condición: $(x,y)\in f(x)$ si y solo si $(y,x)\in f^{-1}(x)$.

Notas:

- En la notación $f^{-1}(x)$, el exponente no funciona como tal, no lo es una forma convenida de denotar la inversa de una función.
- La definición indica que el Dominio de $f(x)$ es el Rango de $f^{-1}(x)$ y el Rango de $f(x)$ es el Dominio de $f^{-1}(x)$.
- También la definición indica que, para que la inversa de una función sea también una función, es necesario que la función original $f(x)$ sea inyectiva o biyectiva.
- También es posible obtener inversas de funciones que no son inyectivas ni biyectivas, resultando que estas últimas no sean funciones.
- La regla de correspondencia de la inversa de una función se puede obtener despejando "x" de la función original $y=f(x)$, obteniendo $x=f(y)$, luego se sustituye en esta última la "x" por la "y" y la "y" por la "x", quedando finalmente $y=f^{-1}(x)$ su inversa.

EJEMPLOS

Obtener la inversa de cada una de las siguientes funciones cuyo Dominio se especifica.

1) $f(x)=3x-2$; $D=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$; $D=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{x+2}+1$; $D=(-2,\infty)$

4) $f(x)=\frac{-2}{x+1}$; $D=\mathbb{R}-\{-1\}$

5) $f(x)=2\ln(x-1)$; $D=(1,\infty)$

Solución

1) $f(x)=3x-2$

Esta función es polinomial de primer grado, por lo que su dominio es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Al tabular daremos algunos valores negativos, el cero y algunos positivos.

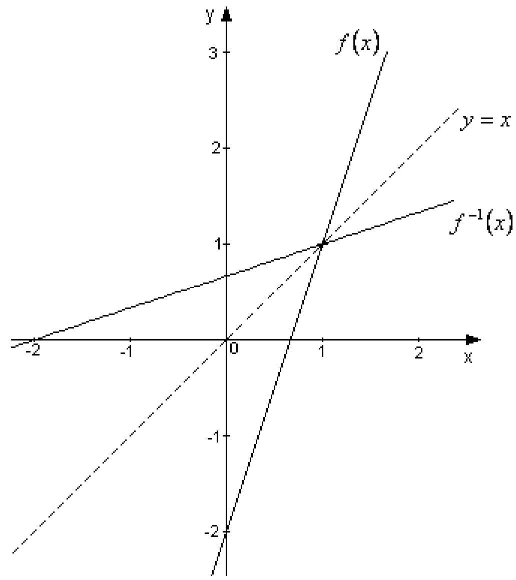
$f(x)=3x-2$

x	y
-3	-11
-2	-8
-1	-5
0	-2
1	1
2	4
3	7

La inversa de la función $f(x)=3x-2$, la obtenemos cambiando la "x" por la "y" y la "y" por la "x" como sigue: $x=3y-2$. Despejando la variable "y" se tiene: $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$. Que es la inversa $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, cuyas gráficas se muestran en la figura, observando que son simétricas respecto a la recta $y=x$.

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

x	y
-11	-3
-8	-2
-5	-1
-2	0
1	1
4	2
7	3



2) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$

El dominio es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y el rango es el conjunto $[2,\infty)$.

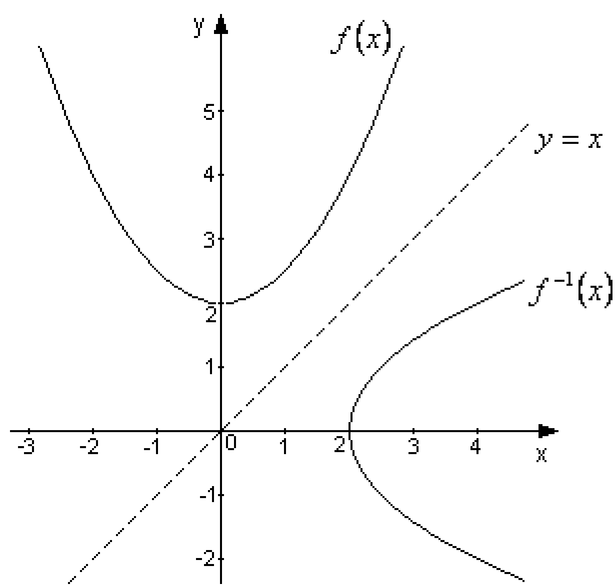
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$$

x	y
± 3	$\frac{13}{2}$
± 2	4
± 1	$\frac{5}{2}$
0	2

La inversa de la función, $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ la obtenemos cambiando la "x" por la "y" y la "y" por la "x" como sigue: $x=\frac{1}{2}y^2+2$. Despejando la variable "y" se tiene: $y=\pm\sqrt{2x-4}$. Que es la inversa $f^{-1}(x)=\pm\sqrt{2x-4}$ que no es función, cuyas gráficas se muestran en la figura, observando que son simétricas respecto a la recta $y=x$.

$$f^{-1}(x)=\pm\sqrt{2x-4}$$

x	y
$\frac{13}{2}$	± 3
4	± 2
$\frac{5}{2}$	± 1
2	0



3) $f(x)=\sqrt{x+2}+1$

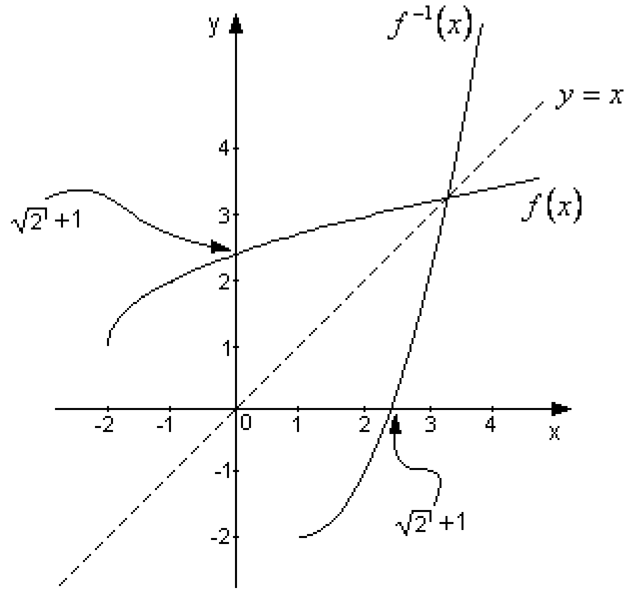
Siguiendo el mismo procedimiento:

$f(x)=\sqrt{x+2}+1$

x	y
–2	1
–1	2
0	$\sqrt{2}+1$
1	$\sqrt{3}+1$
2	3

$f^{-1}(x)=(x-1)^2-2$

x	y
1	–2
2	–1
$\sqrt{2}+1$	0
$\sqrt{3}+1$	1
3	2



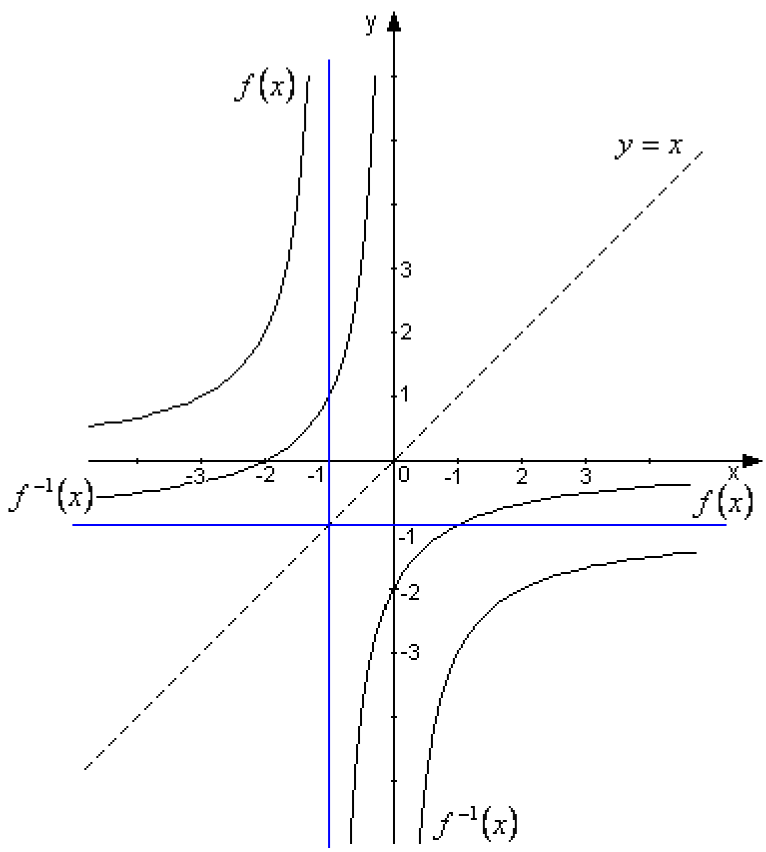
4) $f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$

$f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$

x	y
-3	1
-2	2
$-\frac{3}{2}$	4
$-\frac{1}{2}$	-4
0	-2
1	-1
2	$-\frac{2}{3}$
3	$-\frac{1}{2}$

$f^{-1}(x)=-1-\dfrac{2}{x}$

x	y
1	-3
2	-2
4	$-\frac{3}{2}$
-4	$-\frac{1}{2}$
-2	0
-1	1
$-\frac{2}{3}$	2
$-\frac{1}{2}$	3



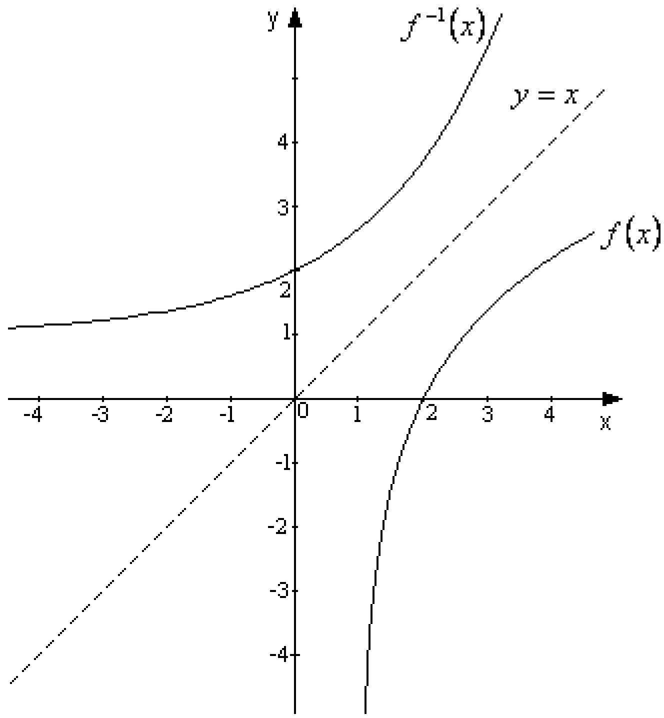
5) $f(x) = 2\ln(x-1)$

$f(x) = 2\ln(x-1)$

x	y
3	1.4
2	0
4	2.2

$f^{-1}(x) = e^{\frac{1}{2}x} + 1$

x	y
1.4	3
0	2
2.2	4



EJERCICIOS

Para cada una de las siguientes funciones, obtenga su inversa.

1) $f(x) = 4x - 1 \quad ; \quad D = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^3 \quad ; \quad D = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sqrt{-1-x} \quad ; \quad D = (-\infty, -1]$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \quad ; \quad D = \mathbb{R}$

5) $f(x) = 2^x \quad ; \quad D = \mathbb{R}$

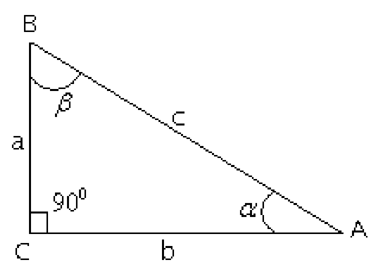
II. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivos: Que el alumno:

1. Sea capaz de explicar el teorema de Pitágoras.
2. Determine las seis razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.
3. Resuelva triángulos rectángulos conociendo al menos dos elementos de estos.
4. Aplique el círculo unitario para obtener los valores de las seis razones trigonométricas de cualquier ángulo.
5. Sea capaz de aplicar las leyes de senos y cosenos para obtener la solución de triángulos que no son rectángulos.
6. Describa que es necesario cumplirse para que una función trigonométrica, su inversa también sea una función.
7. Dada la inversa de una función trigonométrica, sea capaz de determinar su grafica.

2.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas se utilizan fundamentalmente en la solución de triángulos rectángulos, recordando que todo triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90^0 y sus ángulos interiores suman 180^0. La notación que se acostumbra es la siguiente.



$$\alpha+\beta+90^0=180^0$$

Tomamos el ángulo α para definir las razones trigonométricas de la siguiente manera:

$$sen\alpha=\frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa}=\frac{a}{c} \qquad \csc\alpha=\frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto}=\frac{c}{a}$$

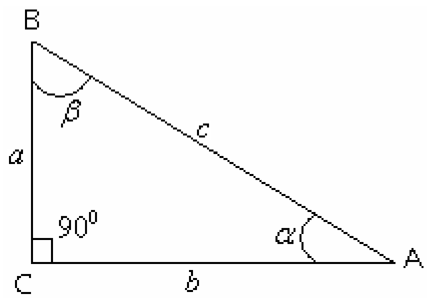
$$\cos\alpha=\frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa}=\frac{b}{c} \qquad \sec\alpha=\frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente}=\frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha=\frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente}=\frac{a}{b} \qquad \cot\alpha=\frac{cateto\ \ adyacente}{cateto\ \ opuesto}=\frac{b}{a}$$

Nota: Véase que las razones $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ son recíprocas de la $\tan\alpha$, $\cos\alpha$, $sen\alpha$ respectivamente.

2.2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo implica obtener la medida de todos sus ángulos y de todas las longitudes de sus lados. En donde se utilizan las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras fundamentalmente, el cuál se enuncia así: **"en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos".**



$$c^2 = a^2 + b^2 \ldots (I)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

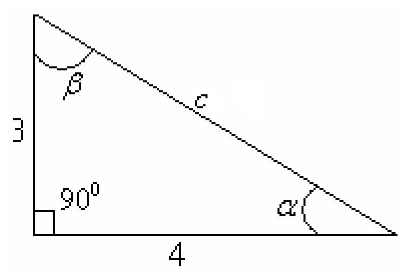
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

EJEMPLOS

Determinar los lados y ángulos faltantes en cada caso.

1) Resolver el siguiente triángulo cuando los catetos miden 3 y 4 unidades.



Para obtener la hipotenusa aplicamos el teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} \quad ; \quad c = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \quad ; \quad c = 5$$

Para calcular los ángulos α y β, podemos hacerlo de la siguiente manera:

$$\tan\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1} 0.75$$

$$\alpha = 36.87^0$$

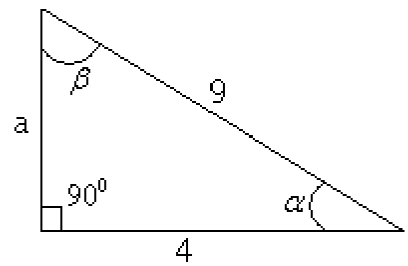
y como $\alpha + \beta + 90^0 = 180^0$

despejando $\beta = 180^0 - 90^0 - 36.87^0$

$$\beta = 53.13^0$$

por lo tanto $\alpha = 36.87^0$; $\beta = 53.13^0$; $c = 5$

2) Calcular β, α, a



Para obtener β:

$sen\beta = \frac{4}{9}$

$\beta = sen^{-1}\frac{4}{9}$

$\beta = 26.38^0$

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{9^2 - 4^2}$

$a = \sqrt{81 - 16}$

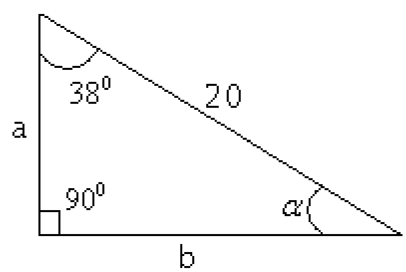
$a = 8.06$

dado que $\alpha + \beta + 90^0 = 180^0$

despejando $\alpha = 180^0 - 26.38^0 - 90^0$

$\alpha = 63.62^0$

3) Calcular a, b, α



$\alpha = 180^0 - 90^0 - 38^0 = 52^0$

Para calcular "a":

$sen52^0 = \frac{a}{20}$

$a = 20sen52^0$

$a = 15.76$

Para calcular "b":

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\cos 52^0 = \frac{b}{20}$

$b = 20\cos 52^0$

$b = 12.31$

4) La torre Eiffel en su base cuadrangular mide 50 metros de lado, ¿cuál es su altura si una persona que mide 1.8 m. de estatura, al mirar la punta mide un ángulo de elevación de 85.4^0?

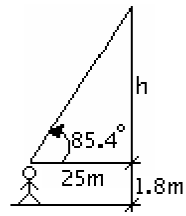
Solución

Si $\tan 85.4^0 = \dfrac{h}{25}$

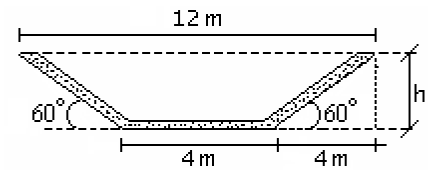
$$25\tan 85.4^0 = h$$

$$h \cong 310.72\,[m]$$

Altura de la torre = $310.72 + 1.8 = 312.52\,[m]$

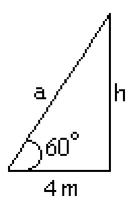


5) ¿Cuál es el área de un canal trapecial con la geometría que se muestra en la figura?



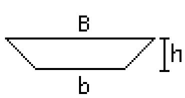
Solución

Determinando cuánto mide la altura "h", el problema se resuelve. Dado que el canal es una figura regular se tiene que:



$$\tan 60^0 = \frac{h}{4} \quad ; \quad 4\tan 60^0 = h$$

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = h \quad ; \quad h \cong 6.93\,[m]$$



El área de un trapecio es "base mayor más base menor entre dos y multiplicado esto por la altura", es decir

$$\frac{B+b}{2}h = \acute{A}rea$$

$$\acute{A}rea = \frac{12+4}{2}(6.93) = 55.44\,[m^2]$$

EJERCICIOS

Resuelva los siguientes triángulos rectángulos:

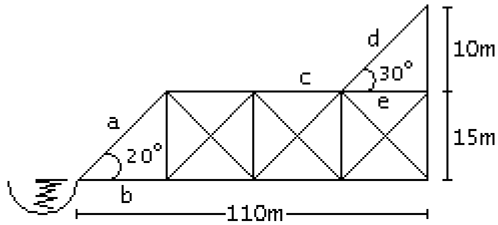
1) Si $b = 2.5$ y $\alpha = 39^0$, encuentre a, c, β

2) Si $a = 4$ y $b = 5$, obtenga c, α, β

3) Un globo aerostático se eleva verticalmente desde el punto P (en el suelo), su ángulo de elevación desde el punto Q (en el suelo también) situado a 250 m del punto P, cambia de 23^0 a 35^0. Determine que tanto se eleva el globo durante este cambio.

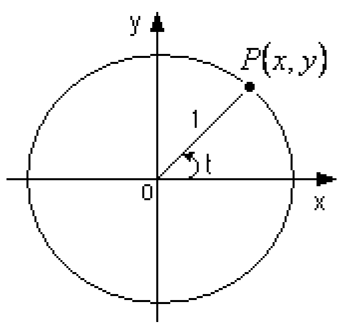
4) El piloto de un avión de Mexicana debe aproximarse a la pista de aterrizaje en el D.F. en un ángulo de 7^0 con respecto a la horizontal. Si vuela a una altitud de 9000m. ¿A qué distancia de la pista debe iniciar su descenso?

5) En la siguiente figura se muestra un diseño de un tobogán, se pide calcular la longitud total del tobogán



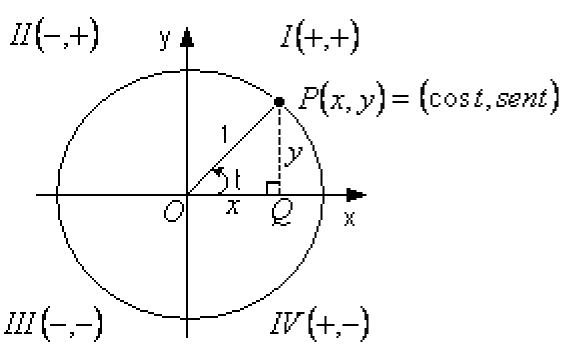
2.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN CUALQUIER CUADRANTE

Un círculo con centro en el origen de coordenadas y de radio la unidad es llamado **círculo unitario**. Sí sobre este círculo tomamos un punto $P(x,y)$, el radio $\overline{OP}$ genera un ángulo positivo de magnitud "t" radianes como se muestra.



Se conviene que se generan ángulos positivos si son medidos a partir del eje "x" y girando en el sentido contrario a las manecillas del reloj hasta el radio $\overline{OP}$ como lo marca la flecha y ángulos negativos girando en el sentido de las manecillas del reloj.

Bajando la perpendicular al eje "x" desde el punto P, se tiene el triángulo rectángulo OPQ, donde podemos definir la razones trigonométricas $sent$ y $\cos t$ por ejemplo.



$$sent = \frac{y}{1} \quad ; \quad y = sent$$

$$\cos t = \frac{x}{1} \quad ; \quad x = \cos t$$

Por lo que el punto $P(x,y)$ puede expresarse como $P(\cos t, sent)$ como se muestra en la figura.

Recordando que el plano coordenado bidimensional o plano cartesiano está formado por cuatro regiones llamadas cuadrantes I, II, III y IV, en donde a la localización de puntos en cada cuadrante le corresponde un determinado signo a cada coordenada, por ejemplo en el cuadrante I se localizan puntos cuyas coordenadas son positivas $(+,+)$, en el II cuadrante $(-,+)$, en el III cuadrante $(-,-)$ y en el IV cuadrante $(+,-)$ como se mostró en la figura anterior. Con esta ley de signos en cada cuadrante, podemos determinar el signo de cualquier razón trigonométrica para ángulos en cualquier cuadrante.

Notas:

- Para obtener radianes conociendo grados o viceversa, podemos aplicar la siguiente proporción: $\boxed{\frac{180^0}{\pi}=\frac{x^0}{y}}$

  Para convertir radianes a grados se despeja la "x".
  Para convertir grados a radianes se despeja la "y".

  Por ejemplo: ¿cuántos radianes son $30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 180^0$?

$$\frac{180^0}{\pi}=\frac{30^0}{y}\text{; despejando } y=\frac{(30^0)\pi}{180^0}=\frac{\pi}{6}\text{ radianes}$$

$$\frac{180^0}{\pi}=\frac{45^0}{y}\text{; despejando } y=\frac{(45^0)\pi}{180^0}=\frac{\pi}{4}\text{ radianes}$$

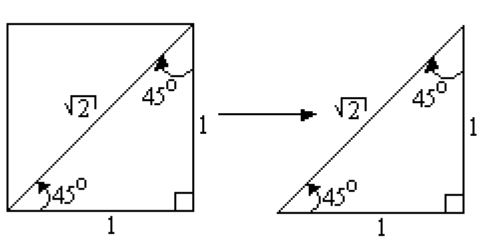
$$\frac{180^0}{\pi}=\frac{60^0}{y}\text{; despejando } y=\frac{(60^0)\pi}{180^0}=\frac{\pi}{3}\text{ radianes}$$

$$\frac{180^0}{\pi}=\frac{90^0}{y}\text{; despejando } y=\frac{(90^0)\pi}{180^0}=\frac{\pi}{2}\text{ radianes}$$

$$\frac{180^0}{\pi}=\frac{180^0}{y}\text{; despejando } y=\frac{(180^0)\pi}{180^0}=\pi\text{ radianes}$$

- La construcción de los siguientes triángulos, puede ser una forma de conocer algunas razones trigonométricas que son solicitadas con frecuencia:

  De un cuadrado tenemos:

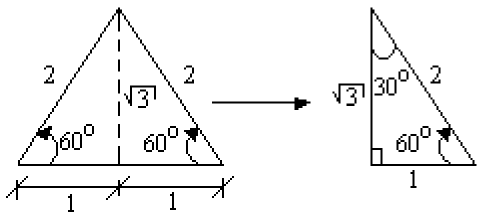


$$sen 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^0=\frac{1}{1}=1$$

Por Pitágoras $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

De un triángulo equilátero:



$$\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$sen30^0 = \frac{1}{2} \qquad sen60^0 \ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

- Tener cuidado con el cuadrante que contiene al ángulo solicitado para determinar correctamente el signo de la razón trigonométrica solicitada.

- El conocimiento de la razón trigonométrica del seno de un ángulo es suficiente para determinar las restantes razones con la aplicación previa del teorema de Pitágoras para conocer el lado restante.

- Los valores que toman las razones trigonométricas, se repiten cada 2π radianes, esto significa por ejemplo que el $sen(t+2\pi)=sent$ y $\cos(t+2\pi)=\cos t$, etc., para todo ángulo $t \in \mathbb{R}$, ya que 2π indica una vuelta completa en el círculo unitario.

- Se recomienda tener presente algunas identidades trigonométricas como las que se enlistan a continuación:

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=sent$$

$$sen^2 t+\cos^2 t=1 \qquad (identidad \quad Pitagórica)$$

$$\sec^2 t-\tan^2 t=1 \qquad (identidad \quad Pitagórica)$$

$$\csc^2 t-\cot^2 t=1 \qquad (identidad \quad Pitagórica)$$

$$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha\, sen\beta$$

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha\, sen\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha\, sen\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha\, sen\beta$$

$$sen2\alpha=2sen\alpha\cos\beta$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

EJEMPLOS

1) Determinar las razones trigonométricas $sen t, \cos t, \tan t, \cot t, \sec t \;\; y \;\; \csc t$ para los ángulos $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$

Solución

Ángulo	sen (t)	cos (t)	tan (t)	cot (t)	sec (t)	csc (t)	Cuadrante
0	0	1	0	indefinida	1	indefinida	I
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	I
$\frac{\pi}{2}$	1	0	Indefinida	0	indefinida	1	I
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	II
π	0	-1	0	indefinida	-1	indefinida	II
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	III
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	indefinida	0	indefinida	-1	III
$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	IV
2π	0	1	0	indefinida	1	indefinida	IV

2) Obtenga los valores de las razones trigonométricas seno, tangente y secante para los ángulos $75^0, 150^0, 230^0 \;\; y \;\; 283^0$ aproximando el resultado a 4 cifras decimales.

Solución

Para obtener los valores de las razones trigonométricas cuando el ángulo está dado en grados, puedes hacerlo con tu calculadora científica, usando el MODO en grados (DEG)

Ángulo	sen	tan	sec	Cuadrante
75^0	0.9659	3.7321	3.8637	I
150^0	0.5	-0.5774	-1.1547	II
230^0	-0.7660	1.1918	-1.5557	III
283^0	-0.9744	-4.3315	4.4454	IV

3) Obtenga los valores de las razones trigonométricas coseno, cotangente y cosecante para los siguientes ángulos dados en radianes: $1.2,\ 2.4536,\ -0.2731,\ -4.27 \quad y \quad 0.5731$

Solución

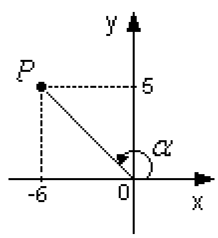
Para obtener los valores de las razones trigonométricas cuando el ángulo dado esta en radianes, puedes hacerlo con tu calculadora científica, usando el MODO en radianes (RAD) o bien usando la fórmula de conversión en grados $(rad)(57.2958) = x^0(grados)$ y aplicar el MODO en grados (DEG).

Ángulo	cos	cot	csc	Cuadrante
1.2	0.3624	0.3888	1.0729	I
2.4536	-0.7725	-1.2166	1.5748	II
-0.2731	0.9629	-3.5701	-3.7076	IV
-4.27	-0.4281	-0.4737	1.1065	II
0.5731	0.8402	1.5495	1.8442	I

4) Sea α el ángulo generado en el sentido positivo por el segmento de recta $\overline{OP}$ cuyas coordenadas son $O(0,0)\ y\ P(-6,5)$. Encuentre los valores de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de α.

Solución

Por el Teorema de Pitágoras



$$\overline{OP} = \sqrt{(-6)^2 + (5)^2} = \sqrt{61}$$

$$sen\alpha = \frac{5}{\sqrt{61}} = 0.6402$$

$$\cos\alpha = \frac{-6}{\sqrt{61}} = -0.7682 \quad ; \quad \tan\alpha = \frac{5}{-6} = -0.8333$$

5) Sin usar calculadora encuentre los valores de las siguientes razones trigonométricas:

$$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right),\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right),\ \cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right),\ \cos 210^0,\ \sec 300^0,\ \cot\left(-135^0\right)$$

Solución

Como cada $\frac{1}{6}\pi$ son 30^0 ; $\frac{5}{6}\pi = 150^0$

$$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sen150^0 = sen30^0 = \frac{1}{2} = 0.5$$; Como cada $\frac{1}{3}\pi$ son 60^0 ; $\frac{2}{3}\pi = 120^0$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos 120^0 = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2} = -0.5$$; Como cada $\frac{1}{4}\pi$ son 45^0 ; $-\frac{5}{4}\pi = -225^0$

$$\cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \cot\left(-225^0\right) = \frac{1}{\tan\left(-225^0\right)} = \frac{1}{-\tan 45^0} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos\left(210^0\right) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.8660$$; $\sec\left(300^0\right) = \sec\left(60^0\right) = \frac{2}{1} = 2$

$$\cot\left(-135^0\right) = \cot\left(45^0\right) = 1$$

EJERCICIOS

1) Determinar las razones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante para los ángulos $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$

2) Obtener los valores de las razones trigonométricas coseno, cotangente y cosecante para los ángulos $75^0, 150^0, 230^0, 283^0$

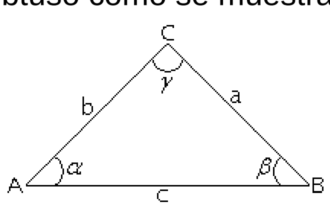
3) Obtenga los valores de las razones trigonométricas seno, tangente y secante para los ángulos $1.2, 2.4536, -0.2731, -4.27, 0.5731$

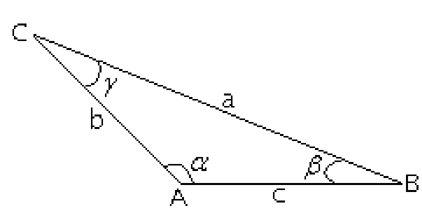
4) Encuentre los valores de las seis razones trigonométricas del ángulo β generado por el segmento de recta $\overline{OP}$ cuyas coordenadas son $O(0,0)$ y $P(3,-4)$

5) Sin usar calculadora obtenga los valores de las siguientes razones trigonométricas: $\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right), sen\left(\frac{7}{6}\pi\right), \tan\left(315^0\right), \sec\left(-150^0\right), \csc\left(-120^0\right), \cot\left(225^0\right)$

2.4. LEY DE LOS SENOS Y LEY DE LOS COSENOS

Para resolver triángulos que no son rectángulos (que no tienen un ángulo de 90^0) se hace uso de las leyes de los senos y/o de los cosenos. Los triángulos con estas características, se llaman oblicuángulos y pueden tener 3 ángulos agudos o dos ángulos agudos y uno obtuso como se muestra:





Resolver un triángulo significa obtener las longitudes de sus lados y la medida de cada uno de sus ángulos. Para lograr esto, es necesario conocer (datos) al menos tres elementos del triángulo y uno de ellos debe ser un lado (L), recordando también por geometría elemental que la suma de sus ángulos internos es 180^0 ($\alpha + \beta + \gamma = 180^0$).

Las combinaciones de datos pueden ser:

1. Conocer dos ángulos y un lado (AAL).

2. Conocer dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).

3. Conocer dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (LAL).

4. Conocer tres lados (LLL).

Ley de los senos: "Dos lados cualesquiera son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

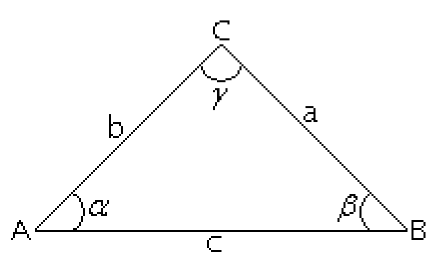
Se acostumbra escribir como $\boxed{\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta} = \dfrac{c}{sen\gamma}}$

Ley de los cosenos: "El cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que forman".

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

EJEMPLOS

Es importante saber que ley debemos aplicar en la solución de un triángulo, en los casos (AAL) y (LLA) donde "A" es opuesto a uno de los lados "L", se recomienda la aplicación de la ley de los senos y en los casos (LAL) donde el ángulo "A" esta comprendido entre los dos lados "L" y en el caso (LLL), se recomienda la aplicación de la ley de los cosenos y recuerda como hemos representado esquemáticamente el triángulo:



1) Resuelva el triángulo $\alpha = 60^0$, $\beta = 40^0$, $b = 4$

Solución

Caso (AAL). Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$; $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 100^0 = \underline{80^0}$

Aplicando la ley de los senos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \quad \text{y} \quad \frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma}$$

$$a = \frac{bsen\alpha}{sen\beta} = \frac{4(sen60^0)}{sen40^0} = \underline{5.39} \quad ; \quad c = \frac{asen\gamma}{sen\alpha} = \frac{5.39(sen80^0)}{sen60^0} = \underline{6.13}$$

2) Resuelva el triángulo $a = 2$, $b = 3$, $\beta = 40^0$

Solución

Caso (LLA). Con "A" opuesto a un "L":

Aplicando la ley de los senos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \; ; \; \frac{2}{sen\alpha} = \frac{3}{sen40^0} \; ; \; sen\alpha = \frac{2sen40^0}{3}$$

$sen\alpha = 0.4285$; $\underline{\alpha = 25.37^0}$, dado que $\alpha + \beta = 25.37^0 + 40^0 = 65.37^0$

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 65.37^0 = \underline{114.63^0}$$

El lado "c" puede calcularse con:

$$\frac{c}{sen\gamma} = \frac{a}{sen\alpha} \; ; \; \frac{c}{sen114.63^0} = \frac{2}{sen25.37^0}$$

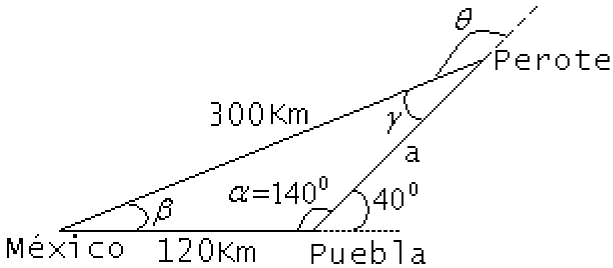
$$c = \frac{2sen114.63^0}{sen25.37^0} = \underline{4.24}$$

3) Un avión vuela de la Ciudad de México a Puebla de los Angeles, que está a 120 Km de distancia, luego cambia su dirección 40^0 y se dirige a la Ciudad de Perote como se muestra en la figura.

a) Si la distancia entre México y Perote es de 300 Km ¿Qué distancia hay de Puebla a Perote?

b) ¿Qué ángulo debe girar el piloto para volver a la Ciudad de México?

Solución



a) Aplicando la ley de los senos:

$$\frac{300}{sen140^0} = \frac{120}{sen\gamma} \;;\; sen\gamma = \frac{120sen140^0}{300} = 0.2571$$

$$\gamma = sen^{-1}(0.2571) = \underline{14.9^0}$$

Y como $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma) = 180^0 - 154.9^0 = \underline{25.1^0}$

La distancia entre Puebla y Perote la podemos calcular sabiendo que:

$$\frac{a}{sen\beta} = \frac{120}{sen\gamma}$$

Despejando $a = \frac{120sen\beta}{sen\gamma} = \frac{120sen25.1^0}{sen14.9^0} = \underline{198\ Km}$

b) El ángulo que debe girar el piloto para volver a la Ciudad de México es $\theta = 180^0 - \gamma = 180^0 - 14.9^0 = \underline{165.1^0}$

4) Resolver el triángulo $a = 3$, $b = 2$, $\gamma = 50^0$

Solución

Caso (LAL). Aplicando la ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = 3^2 + 2^2 - 2(3)(2)\cos 50^0$$

$$c^2 = 9 + 4 - 12\cos 50^0 = 13 - 12(0.64)$$

$$c^2 = 5.32$$

$$c = \sqrt{5.32} = \underline{2.31}$$

Una vez conocido el tercer lado, podemos decidir aplicar la ley de senos o de cosenos para completar la solución del triángulo.

Para α : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, despejando $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\cos\alpha = \frac{4 + 5.32 - 9}{2(2)(2.31)} = 0.0346 \;\; ; \;\; \alpha = \cos^{-1} 0.0346 = \underline{88.02^0}$$

Y como $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma) = 180^0 - 138.02^0 = \underline{41.98^0}$

5) Resolver el triángulo $a = 3$, $b = 6$, $c = 4$

<u>Solución</u>

Caso (LLL). Aplicando la ley de los cosenos para α :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, despejando $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Sustituyendo valores: $\cos\alpha = \dfrac{(6)^2 + (4)^2 - (3)^2}{2(6)(4)} = 0.9$

$$\alpha = \cos^{-1} 0.9 = \underline{25.8^0}$$

Una vez conocido uno de los ángulos, podemos optar por aplicar la ley de senos o de cosenos para completar la solución del triángulo.

Para β : $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta}$; $\dfrac{3}{sen25.8^0} = \dfrac{6}{sen\beta}$

Despejando $sen\beta = \dfrac{6sen25.8^0}{3} = 0.87$

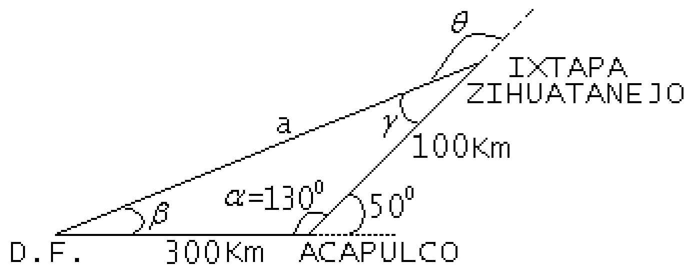
$$\beta = sen^{-1} 0.87 = \underline{60.5^0}$$

Y como $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 86.3^0 = \underline{93.7^0}$

6) Un avión vuela una distancia de 300Km del D.F. al puerto de Acapulco, luego cambia su rumbo 50^0 y se dirige a Ixtapa Zihuatanejo que está a 100Km según la figura.

a) ¿Qué tan lejos está el D.F. de Ixtapa Zihuatanejo?
b) ¿Qué ángulo debe girar el piloto en Ixtapa Zihuatanejo para regresar al D.F.?

Solución



a) Aplicando la ley de los cosenos $a^2 = (300)^2 + (100)^2 - 2(300)(100)\cos 130^0$

$$a^2 = 90000 + 10000 - 60000(-0.643) = 138580$$

$$a = \sqrt{138580} = \underline{372.26\ Km}$$

b) Aplicando la ley de los senos $\dfrac{300}{sen\gamma} = \dfrac{372.26}{sen130^0}$

despejando $sen\gamma = \dfrac{300sen130^0}{372.26} = 0.62$; $\gamma = sen^{-1}0.62 = 38.3^0$

y como $\theta = 180^0 - \gamma = 180^0 - 38.3^0 = \underline{141.7^0}$

EJERCICIOS

Resolver cada triángulo con la información dada:

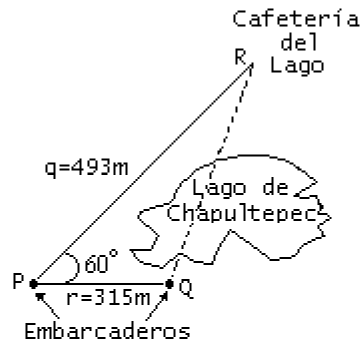
1) $a = 3.1, \quad \alpha = 39^0, \quad \beta = 63^0$

2) $a = 42, \quad b = 23, \quad \alpha = 31.33^0$

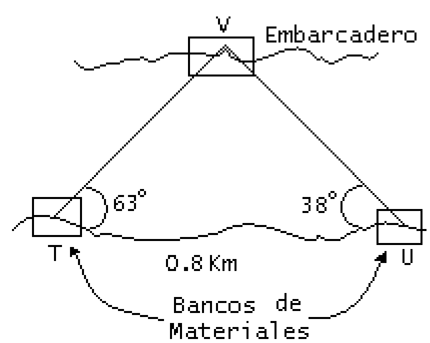
3) $a = 14.1, \quad b = 21.2, \quad \gamma = 58.75^0$

4) $a = 23, \quad b = 34, \quad c = 29$

5) En el lago de Chapultepec se localizan dos embarcaderos, el P y el Q cuya distancia entre ellos es de 315 metros, desde el embarcadero P girando un ángulo de 60^0 se tiene una distancia de 493 m hasta la cafetería del lago R, según se muestra en la figura. ¿Cuál es la distancia desde el embarcadero Q hasta la cafetería del lago R?



6) Sobre el margen de un río se localizan dos bancos de materiales T y U separados uno del otro 0.8 Km. y en la otra margen del río se localizó un sitio V en donde se construirá un embarcadero. Los ángulos VTU y VUT miden 63^0 y 38^0 respectivamente, se desea determinar de que banco de materiales resultará más conveniente traer el material por su cercanía.



2.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Recordemos que la gráfica de una función inyectiva $y = f(x)$ y de su inversa $y = f^{-1}(x)$, tienen la característica de que si (a,b) es un punto de la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces el punto de coordenadas (b,a) es un punto de la gráfica de su inversa $y = f^{-1}(x)$ y que estos puntos (a,b) y (b,a) están situados simétricamente respecto a la gráfica de la recta $y = x$, esto es, que la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ es una reflexión de la gráfica de la función $y = f(x)$ respecto de la recta $y = x$.

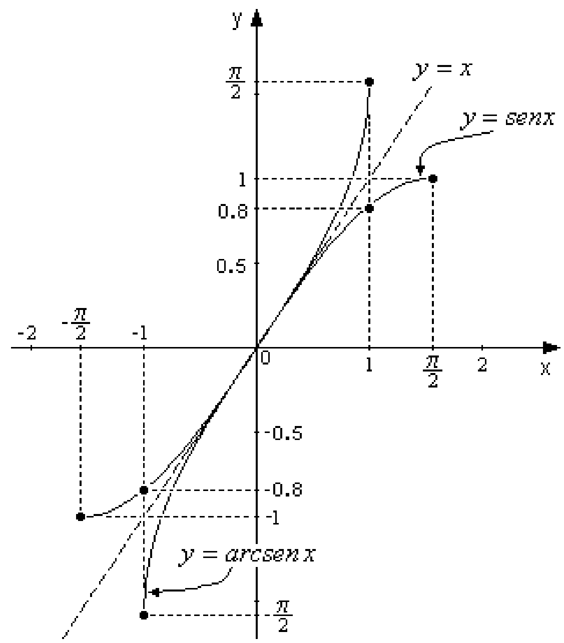
Pero resulta que como ninguna de las funciones trigonométricas es inyectiva, es necesario restringir su dominio para hacerlas inyectivas y poder definir su inversa como función.

EJEMPLOS

1) En la función $y = senx$, su dominio y su rango son $D = (-\infty, \infty)$ (todos los reales) y $R = [-1,1]$ (los reales entre -1 y 1 inclusive), para que la inversa de esta función sea también una función, es necesario restringir su dominio a $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ conservando su rango $R = [-1,1]$ y definiendo la inversa como $y = arcsen(x)$, se lee "función arco-seno de x" o también como $y = sen^{-1}(x)$, se lee "función seno inverso de x", cuyas gráficas son:

x	senx
$-\frac{\pi}{2} = -90^0$	-1.00
$-\frac{\pi}{3} = -60^0$	-0.87
$-\frac{\pi}{4} = -45^0$	-0.71
$-\frac{\pi}{6} = -30^0$	-0.50
$\frac{\pi}{6} = 30^0$	0.50
$\frac{\pi}{4} = 45^0$	0.71
$\frac{\pi}{3} = 60^0$	0.87
$\frac{\pi}{2} = 90^0$	1.00

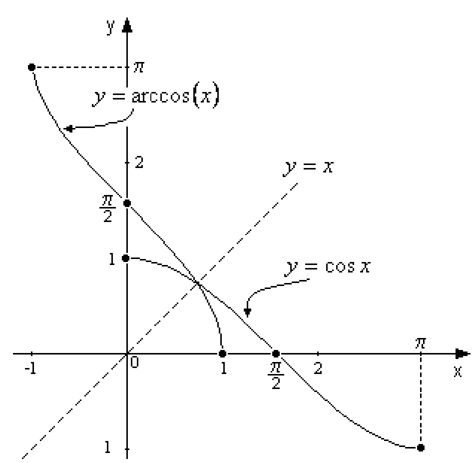
x	$sen^{-1}x$
-1.00	$-\frac{\pi}{2} = -1.57$
-0.87	$-\frac{\pi}{3} = -1.05$
-0.71	$-\frac{\pi}{4} = -0.79$
-0.50	$-\frac{\pi}{6} = -0.52$
0.50	$\frac{\pi}{6} = 0.52$
0.71	$\frac{\pi}{4} = 0.79$
0.87	$\frac{\pi}{3} = 1.05$
1.00	$\frac{\pi}{2} = 1.57$



2) Si la función $y = \cos x$ tiene dominio $D = (-\infty, \infty)$ y rango $R = [-1,1]$, para que su inversa sea una función, es necesario restringir su dominio a $D = [0, \pi]$, conservando su rango $R = [-1,1]$. Su inversa se define como $y = \arccos(x)$, se lee "función arco-coseno de x" o también como $y = \cos^{-1}(x)$, se lee "función coseno inverso de x", cuyas gráficas son:

x	cosx
0.00	1.00
$\frac{\pi}{6} = 30^0$	0.87
$\frac{\pi}{4} = 45^0$	0.71
$\frac{\pi}{3} = 60^0$	0.50
$\frac{\pi}{2} = 90^0$	0.00
$\frac{2\pi}{3} = 120^0$	-0.50
$\pi = 180^0$	-1.00

x	$\cos^{-1}x$
1.00	0.00
0.87	$\frac{\pi}{6} = 0.52$
0.71	$\frac{\pi}{4} = 0.79$
0.50	$\frac{\pi}{3} = 1.05$
0.00	$\frac{\pi}{2} = 1.57$
-0.50	$\frac{2\pi}{3} = 2.09$
-1.00	$\pi = 3.14$



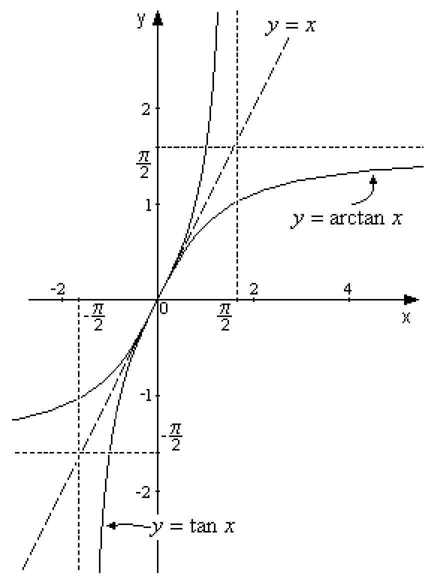
Nota:

- Se hace la aclaración de que la notación $y = sen^{-1}(x)$ ó $y = \cos^{-1}(x)$, el exponente a la menos uno en cualquier función trigonométrica es solo una manera de denotar la inversa, es decir: $sen^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{senx}$. Se propone la notación $arcsen(x)$, $\arccos(x), \ldots$ para evitar el exponente (-1).

3) La función $y = \tan x$ tiene dominio los números reales con excepción de los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$, o sea: $D = \mathbb{R} - \left\{ x \middle| x = \pm(2n-1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$ y su rango todos los reales $R = (-\infty, \infty)$. Su inversa será función restringiendo su dominio a $D = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, conservando su rango $R = (-\infty, \infty)$, cuyas gráficas son:

x	tanx
$-\frac{\pi}{3}=-60^0$	-1.73
$-\frac{\pi}{4}=-45^0$	-1.00
$-\frac{\pi}{6}=-30^0$	-0.58
$\frac{\pi}{6}=30^0$	0.58
$\frac{\pi}{4}=45^0$	1.00
$\frac{\pi}{3}=60^0$	1.73

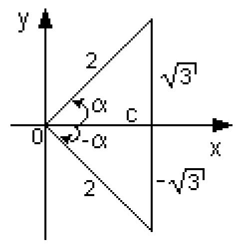
x	$\tan^{-1}x$
-1.73	$-\frac{\pi}{3}=-1.05$
-1.00	$-\frac{\pi}{4}=-0.79$
-0.58	$-\frac{\pi}{6}=-0.52$
0.58	$\frac{\pi}{6}=0.52$
1.00	$\frac{\pi}{4}=0.79$
1.73	$\frac{\pi}{3}=1.05$



4) Determinar el valor de la función $sen^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

<u>Solución</u>

Sea $\alpha = sen^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, entonces se busca un ángulo α comprendido en el intervalo $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ ó lo que es lo mismo, entre $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno sea $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, esto es: $sen\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ lo cual resulta que α debe estar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ (ver figura) pues $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es una razón positiva, luego el único ángulo dentro del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es $\alpha = 60^0 = \frac{\pi}{3}$



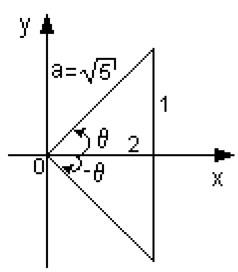
Por el Teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{(2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$$

5) Obtener el valor de la expresión $sen\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$:

<u>Solución</u>

Si $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, entonces $\tan\theta = \frac{1}{2}$, donde este ángulo “θ” debe estar dentro del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ y como la razón $\frac{1}{2}$ es positiva entonces “θ” debe estar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ (ver figura), por lo tanto $sen\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = sen\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$



Por el Teorema de Pitágoras

$$a = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

EJERCICIOS

Obtenga las gráficas de las funciones:

1) $y = \cot(x)$ y de su inversa $y = \cot^{-1}(x)$

2) $y = \sec(x)$ y de su inversa $y = \sec^{-1}(x)$

3) $y = \csc(x)$ y de su inversa $y = \csc^{-1}(x)$

4) Encuentre el valor de la expresión $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

5) Obtenga el valor de $\tan\left[sen^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

III. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Objetivos: Que el alumno:

1. Sea capaz de definir una función exponencial y una logarítmica también.
2. Dada una función exponencial, sea capaz de determinar su inversa y graficarlas sobre el mismo sistema coordenado bidimensional y viceversa.

3.1. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Hemos estado manejando en este trabajo expresiones del tipo $y = x^n$ en donde "x" es una variable llamada base y "n" una constante llamada exponente, si intercambiamos de lugar la base y el exponente obtenemos una expresión del tipo $y = n^x$ la cual recibe el nombre de función exponencial, siendo muy importante su estudio para la solución de muchos problemas.

Definición:

Si $a > 0$ entonces la función exponencial con base a se define como: $y = f(x) = a^x$ donde x es cualquier número real.

Su dominio son los números reales $D = (-\infty, \infty)$, su imagen o rango son los números reales positivos $R = (0, \infty)$.

Observando que para $a > 1$ si "x" crece "y" también lo hace rápidamente y si "x" disminuye "y" se acerca a cero lo cual se ilustra con las siguientes gráficas.

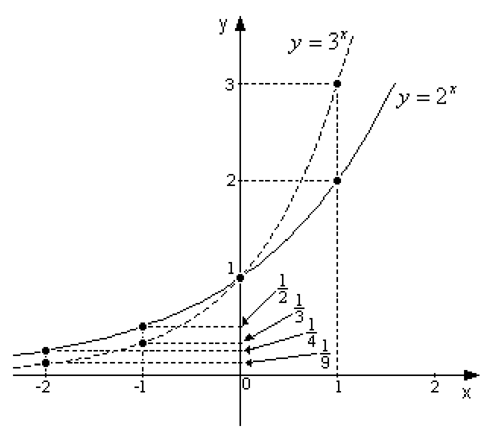
EJEMPLOS

1) Dibuje las gráficas de las funciones exponenciales $y = 2^x$ y $y = 3^x$, sobre el mismo sistema coordenado.

Solución

Como su dominio son todos los números reales $D = (-\infty, \infty)$, tabulando algunos valores se tiene:

x	2^x	3^x
1	2	3
2	4	9
0	1	1
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$



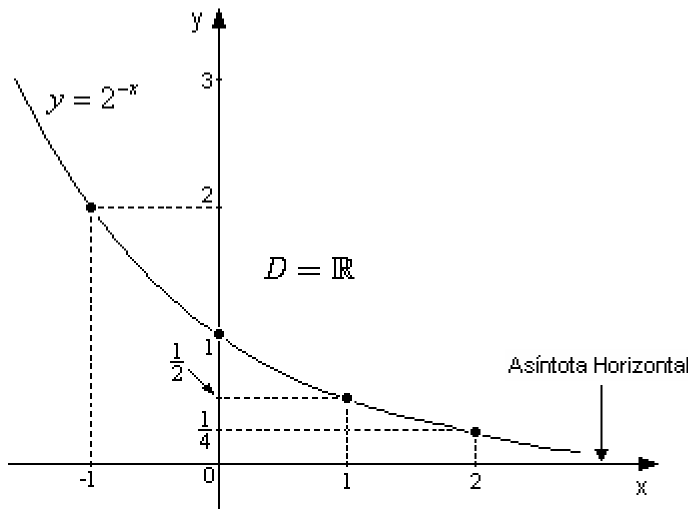
Se observa que el eje de las equis, de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal de este tipo de curvas.

2) Trace la gráfica de la función $y = 2^{-x}$

Solución

Tabulando:

x	2^{-x}
2	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
0	1
-1	2
-2	4
-3	8



En los ejemplos 1) y 2) se observa que el punto $(0,1)$ es común a todas las gráficas de funciones del tipo $y = a^x$ (todo número real excepto cero elevado a la cero potencia es igual a uno).

Existe un número irracional "e" utilizado con mucha frecuencia en funciones exponenciales, dado que $y = e^x$ tiene infinidad de aplicaciones prácticas como teóricas. En cursos superiores se aclarará la enorme importancia que tiene el número "e" en el desarrollo de la MATEMÁTICA. El valor aproximado del número "e" es $2.71828\ldots$ y la gráfica de $y = e^x$ quedará entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ del ejemplo 1).

3) El número "y" de bacterias en millones, en un cultivo, "t" horas después de iniciado el experimento viene dado por $y = f(t) = 20e^{\frac{t}{3}}$. Se pregunta:

a) El número de bacterias al principio del experimento.
b) El número de bacterias después de una hora y de dos horas.
c) Graficar la función.

Solución

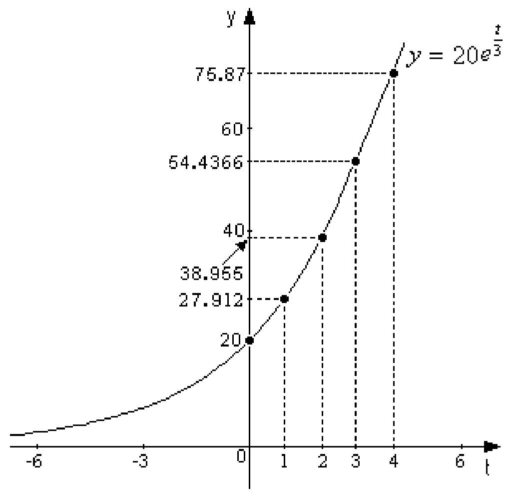
a) Como $t = 0$; $y = 20e^{\frac{0}{3}} = 20e^0 \Rightarrow y = 20$. Existían 20 millones de bacterias al iniciar el experimento.

b) Si $t=1 \Rightarrow y=20e^{\frac{1}{3}}=20(1.3956)=27.912$. Existen 27.912 millones de bacterias después de una hora.

Si $t=2 \Rightarrow y=20e^{\frac{2}{3}}=20(1.9477)=38.955$. Existen 38.955 millones a las dos horas, casi el doble que al inicio del experimento.

Para dibujar la gráfica obtendremos el número de bacterias a las 3 y 4 horas para obtener más puntos de la gráfica.

$$y(3)=20e^{\frac{3}{3}}=20(2.7183)=54.4366$$
$$y(4)=20e^{\frac{4}{3}}=20(3.7937)=75.874$$

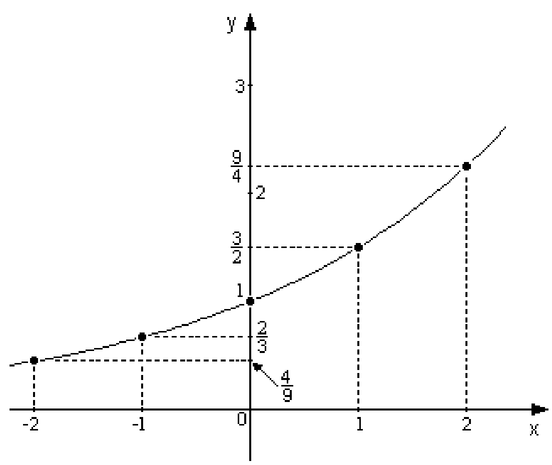


x: tiempo en horas
t: millones de bacterias

4) Traza la gráfica de la función $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

Solución

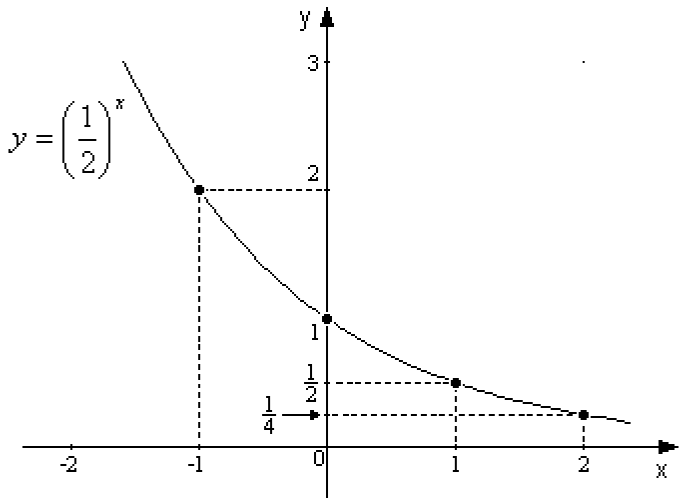
x	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$
2	$\frac{9}{4}$
1	$\frac{3}{2}$
0	1
-1	$\frac{2}{3}$
-2	$\frac{4}{9}$



5) Dibuja la gráfica de la función $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

Solución

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
2	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
0	1
-1	2
-2	4



EJERCICIOS

Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

1) $y=4^{x}$

2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$

3) $y=4\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

4) $y=e^{-x^{2}}$

5) Obtener la estatura y en centímetros para un niño de 2 años de edad si esta determinada por la función: $y=79+6.4t-e^{3.25-t}$

3.2. FUNCIÓN LOGARITMO

Como ya hemos visto anteriormente, la inversa de una función exponencial $y=a^{x}$, con $a>0$, se obtiene intercambiando la "y" por la "x" y la "x" por la "y": $x=a^{y}$, y al despejar de esta última la variable "y", se obtiene la función logarítmica $y=\log_{a}x$, que se lee "logaritmo de x de base a" y como el dominio y el rango de la función exponencial $y=a^{x}$ son: $D=(-\infty,\infty)$, $R=(0,\infty)$, entonces en la función logarítmica $y=\log_{a}x$, se cambian los papeles, resultando que su dominio y su rango son $D=(0,\infty)$, $R=(-\infty,\infty)$.

Definición:

$y = \log_a x$ si y solo si $x = a^y$
con $a > 0$, y $x > 0$

Lo que verbalmente podemos decir "el logaritmo de un número "x" es el exponente "y" al cual se debe elevar la base "a" para obtener dicho número "x".

EJEMPLOS

1) Sobre el mismo sistema coordenado, bosquejar la gráfica de las funciones $y = 2^x$ y su inversa $y = \log_2 x$.

<u>Solución</u>

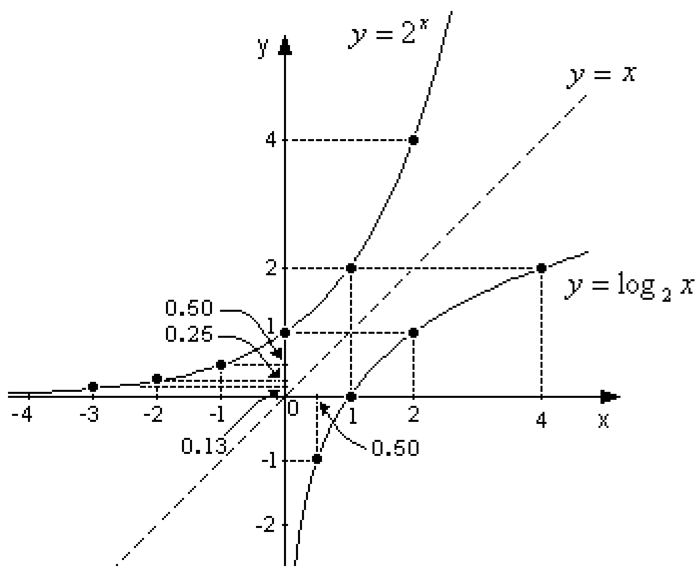
La inversa de la función $y = 2^x$ es $x = 2^y$, de la cual despejando la "y" se tiene $y = \log_2 x$ (que es una función logarítmica de base 2). Tabulando la función $y = 2^x$ y luego invirtiendo los valores de las coordenadas, se tiene la tabulación de su inversa $y = \log_2 x$ como sigue:

$y = 2^x$

x	2^x
-3	0.13
-2	0.25
-1	0.50
0	1.00
2	4.00
3	8.00

$y = \log_2 x$

x	$\log_2 x$
0.13	-3
0.25	-2
0.50	-1
1.00	0
4.00	2
8.00	3



2) Sobre el mismo sistema coordenado, bosquejar la gráfica de las funciones $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \log_3 x$.

<u>Solución</u>

Cuando la base de una función logarítmica es el número "e", es decir, $y = \log_e x$, se acostumbra escribir $y = \ln x$ y se le llama "función logaritmo natural". Como el número "e" se encuentra entre el 2 y el 3 $(2 < e < 3)$, la gráfica de la función $y = \ln x$ se localiza entre las gráficas de las funciones $y = \log_2 x$ y de $y = \log_3 x$ como se muestra en la figura.

Para graficar $y = \log_3 x$, de acuerdo con la definición es lo mismo que $x = 3^y$, por lo que se hace más fácil graficar esta última ya que las calculadoras científicas no pueden calcular logaritmos de base 3, por lo tanto, para tabular algunos valores de $x = 3^y$, proponemos algunos valores para "y" de su rango $R = (-\infty, \infty)$ como sigue:

$y = \log_3 x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^y$

x	$\log_3 x$
0.04	-3
0.11	-2
0.33	-1
1.00	0
3.00	1
9.00	2
27.00	3

Si

$$y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0.04$$

$$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0.11$$

$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3^0 = \frac{1}{3^0} = \frac{1}{1} = 1.00$$

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3^1 = 3.00$$

$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 3^2 = 9.00$$
$$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^3 = 27.00$$

Para graficar $y = \ln x$ es lo mismo que $x = e^y$, tabulando con esta última expresión, tenemos:

$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$

x	$\ln x$
0.05	-3
0.14	-2
0.37	-1
1.00	0
2.72	1
7.39	2
20.09	3

Si

$$y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \cong 0.05$$

$$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \cong 0.14$$

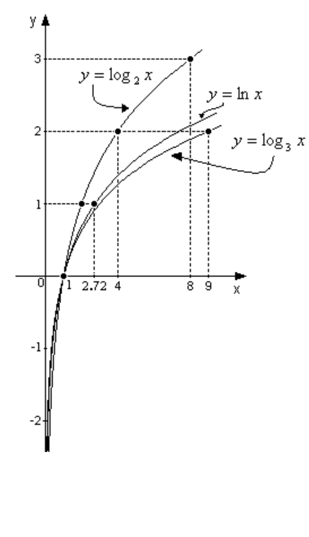
$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e^1} \cong 0.37$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^0 = 1$$

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e^1 \cong 2.72$$

$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = e^2 \cong 7.39$$

$$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = e^3 \cong 20.09$$



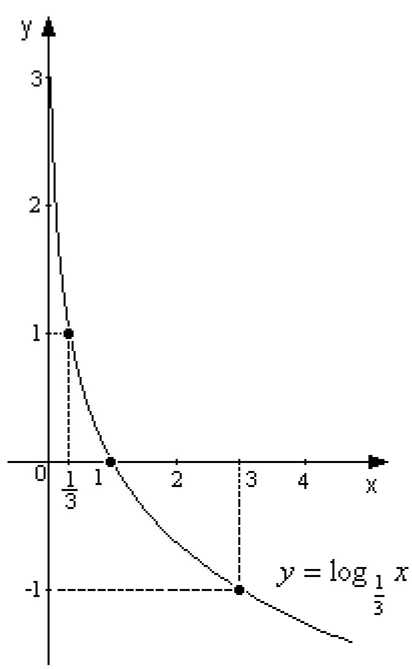
Nota: Si sabemos que por definición una función logarítmica, tiene su equivalente en forma exponencial. La graficación de funciones logarítmicas se facilita con el uso de la calculadora científica, con la función $\boxed{y^x}$, ya que en su mayoría, las calculadoras cuentan con las funciones $\boxed{\log}$ (logaritmo base 10) y con $\boxed{\ln}$ (logaritmos base e) únicamente.

3) Obtener la gráfica de la función $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Solución

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^y$
27	-3
9	-2
3	-1
1	0
0.33	1
0.11	2
0.04	3



Si $y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 3^3 = 27$

$$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^1} = 3$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 0.33$$

$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0.11$$

$$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} = 0.04$$

4) Obtenga la gráfica de la función $y = \log_2(-x)$

Solución

Como solo hay logaritmos para argumentos positivos, el argumento $(-x)$ será positivo si "x" toma valores negativos, por lo que el dominio de esta función son todos los reales negativos o lo que es lo mismo $D = (-\infty, 0)$, tabulando se tiene:

$y = \log_2(-x) \quad \Leftrightarrow \quad -x = 2^y \;;\; x = -2^y$

x	$\log_2(-x)$
-0.13	-3
-0.25	-2
-0.50	-1
-1.00	0
-2.00	1
-4.00	2
-8.00	3

Si $y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^{-3} = -\dfrac{1}{2^3} = -\dfrac{1}{8} \cong -0.13$

$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^{-2} = -\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4} = -0.25$

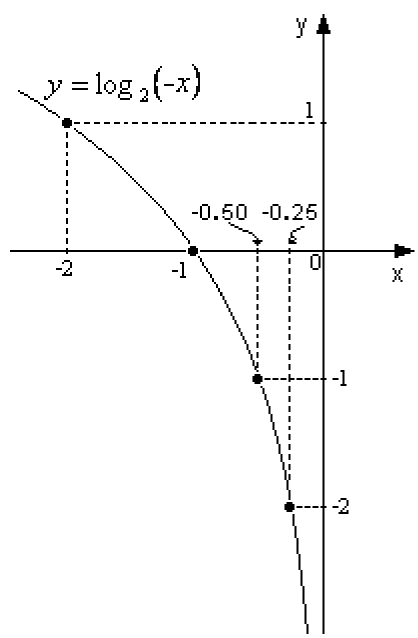
$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^{-1} = -\dfrac{1}{2^1} = -\dfrac{1}{2} = -0.50$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^0 = -1$

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^1 = -2$

$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^2 = -4$

$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = -(2)^3 = -8$



5) Graficar la función $y=-\log_3(-x)$

Solución

$$y=-\log_3(-x) \quad \Leftrightarrow \quad -y=\log_3(-x)\,;\,-x=3^{-y}=\frac{1}{3^y}\,;\,x=-\frac{1}{3^y}$$

Si $y=-3 \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{3^{-3}}=-3^3=-27$

$y=-2 \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{3^{-2}}=-3^2=-9$

$y=-1 \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{3^{-1}}=-3^1=-3$

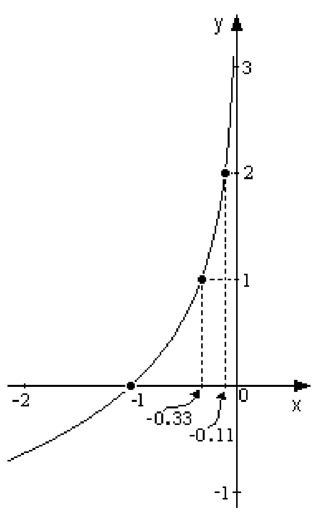
$y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{3^0}=-1$

$y=1 \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{3^1}=-0.33$

$y=2 \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{3^2}=-\dfrac{1}{9}=-0.11$

$y=3 \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{3^2}=-\dfrac{1}{27}=-0.04$

x	$-\frac{1}{3^y}$
-27	-3
-9	-2
-3	-1
-1	0
-0.33	1
-0.11	2
-0.04	3



El interés compuesto es un ejemplo de aplicación de este tipo de funciones, brevemente podemos explicarlo como sigue:

Si una persona deposita en el banco $1000.00 en una cuenta de ahorro donde el banco le paga una tasa de interés del 8% anual, al final del primer año la persona recibirá $1080.00, si no retira esta cantidad, para el siguiente año recibirá $1166.40 y asi sucesivamente.

Este tipo de problemas da origen al siguiente desarrollo conceptual.

Año	Capital	Interés	Monto
0	1000.00	0.00	1000.00
1	1000.00	80.00	1080.00
2	1080.00	86.40	1166.40
3	1166.40	93.31	1259.71
● ● ●	● ● ●	● ● ●	● ● ●

En general: si C es el capital inicial
i es la tasa de interés
t es el período de capitalización
n es el número de años
M es el monto capitalizado

La fórmula del interés compuesto es: $M = C\left(1+\frac{i}{t}\right)^{tn}$

6) Si Raúl deposita $30 000.00 en una cuenta de ahorro que le da un interés del 11.5% capitalizable trimestralmente, ¿cuánto recibirá después de 5 años?

Solución

$$M = C\left(1+\frac{i}{t}\right)^{tn} = 30\,000\left(1+\frac{0.115}{4}\right)^{4(5)} = 30\,000(1.02875)^{20} = 30\,000(1.7628)$$

$$\underline{M = \$52\,883.26}$$

Raúl recibirá al final del quinto año la cantidad anterior.

EJERCICIOS

Obtener la gráfica de las siguientes funciones:

1) $y = \log x$

2) $y = \ln(2x)$

3) $y = \log_2 x^2$

4) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right)$

5) $y = \log_2(x+1)$

6) ¿A qué tiempo se debe invertir un capital de $\$100\,000.00$ al 20% anual compuesto, para triplicar el capital inicial?

IV. SISTEMAS DE COORDENADAS Y ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS

Objetivos: Que el alumno:

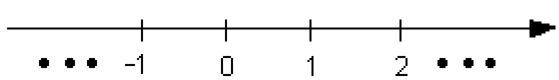
1. Produzca la recta real o recta numérica.
2. Dadas las coordenadas de algunos puntos del plano coordenado bidimensional, sea capaz de ubicarlos correctamente en dicho plano.
3. Interprete correctamente los diferentes intervalos de números reales dados en sus diferentes formas.
4. Localice puntos de coordenadas conocidas sobre el plano polar.
5. Dadas las coordenadas de ternas ordenadas de puntos, sea capaz de ubicarlos en el sistema coordenado tridimensional.
6. Dadas las coordenadas de dos puntos del plano bidimensional y del tridimensional también, sea capaz de determinar la distancia entre dos puntos del plano y de la tridimensión también.
7. Dadas las coordenadas de los puntos extremos de un segmento de recta, sea capaz de obtener las coordenadas del punto que divide al segmento de recta según una razón dada.
8. Explique la clasificación de los polígonos.
9. Describa los conceptos de congruencia y de semejanza de triángulos.
10. Aplicando congruencia y semejanza, sea capaz de resolver problemas.
11. Defina ángulo de inclinación y pendiente de una recta.
12. Conocidas las coordenadas de dos puntos en cada una de dos rectas, sea capaz de determinar si son paralelas, perpendiculares o ninguna de estas.
13. Conocidas las pendientes de dos rectas, sea capaz de determinar el ángulo entre ellas (cualquiera de los dos).
14. Conocidas las coordenadas de los vértices de un polígono cerrado, sea capaz de obtener su área.

4.1. LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN LA RECTA NUMÉRICA

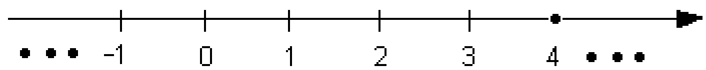
El método de coordenadas es un procedimiento que nos permite determinar la posición de un punto en el espacio, en un plano y en particular sobre la recta mediante el uso de números llamados coordenadas.

Por ejemplo, cuando viajamos por alguna carretera, la posición de un punto se indica en pequeños postes ubicados a un costado del camino, indicando el kilometraje, siendo este la coordenada de ese lugar.

La recta numérica o eje numérico es la recta sobre la que están indicados el origen de coordenadas, la unidad de medida y la dirección positiva mediante una flecha.



Una vez que se ha establecido una <u>correspondencia biunívoca</u> entre números reales y puntos de la recta, donde resulta que a cada punto de la recta corresponde un número determinado y viceversa. Para determinar la posición de un punto sobre esta recta numérica (o recta real), es suficiente designar un número, por ejemplo el 4 (esto significa que dicho punto se localiza a una distancia de 4 unidades de medida del origen de coordenadas y en la dirección positiva).



En general, la coordenada de un punto sobre la recta numérica, es el número que determina la posición de dicho punto sobre este eje.

La coordenada de un punto sobre la recta numérica, es igual a la distancia entre el punto y el origen de coordenadas de acuerdo con la unidad de medida elegida, con signo positivo si el punto se encuentra en la dirección positiva del origen y con signo menos en caso contrario.

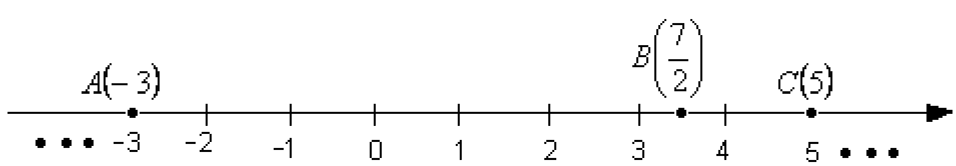
La coordenada del origen es el cero.

Es costumbre denotar puntos sobre la recta numérica como: $A(4)$, $T\left(-\frac{3}{2}\right)$, $M(10.2)$, $S(a)$, etc.

EJEMPLOS

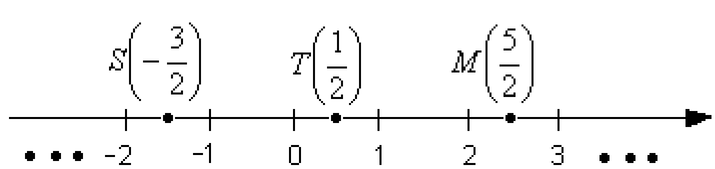
1) Localice sobre la recta numérica los puntos $A(-3)$, $B\left(\frac{7}{2}\right)$, $C(5)$.

<u>Solución</u>



2) Encuentre sobre la recta numérica dos puntos M y S que estén a la distancia de 2 unidades del punto $T\left(\frac{1}{2}\right)$.

<u>Solución</u>



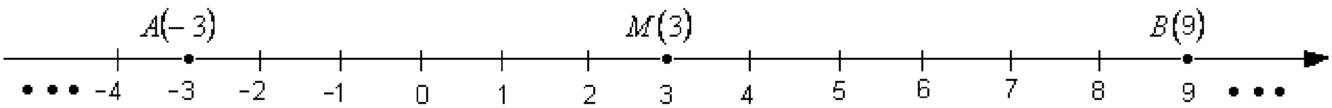
3) ¿Cuál de los puntos $A(a)$ y $B(-a)$ está a la derecha si $a<0$?

Solución

Como "a" es negativa, entonces "$-a$" es positiva, por lo tanto el punto B está a la derecha del punto A.

4) Localice sobre la recta numérica los puntos $A(-3)$ y $B(9)$ y obtenga la coordenada del punto medio del segmento $\overline{AB}$

Solución



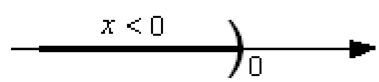
$\frac{9-3}{2}=\frac{6}{2}=3$; $M(3)$

5) Señale sobre la recta numérica o recta real todos los puntos "x" para los cuales se cumple que:

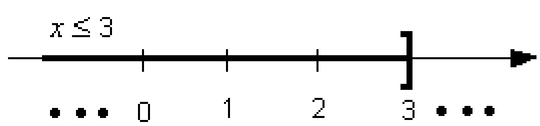
a) $x<0$ b) $x\leq 3$ c) $x>\frac{5}{2}$ d) $-1<x<2$ e) $x^2<1$

Solución

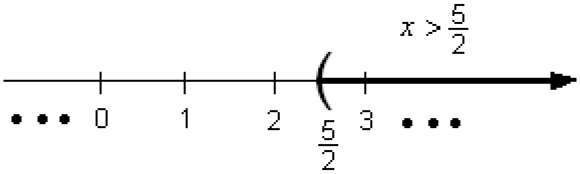
a)



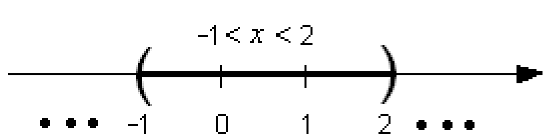
b)



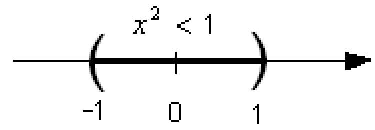
c)



d)



e)



EJERCICIOS

1) Marque sobre la recta numérica los puntos $A\left(-\frac{5}{4}\right)$, $B(0.2)$, $C(7)$, $D(-4.5)$, $E(0)$.

2) Marque sobre la recta numérica el punto $F(-3)$ y encuentre las coordenadas de dos puntos sobre la misma recta que estén a la distancia de 2.5 unidades del punto F .

3) ¿Cuál de los puntos A o B está a la derecha en cada inciso?

a) $A(x),\ B(2x)$ b) $A(c),\ B(c+2)$ c) $A(x),\ B(x^2)$ d) $A(x),\ B(x-a)$

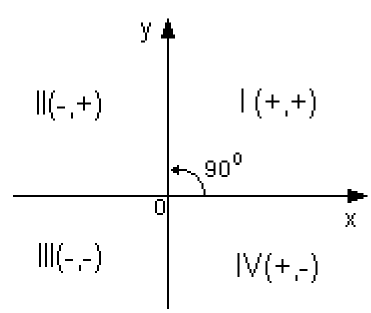
4) Localice sobre la recta numérica los puntos $M(-5)$ y $R(-1)$ y obtenga la coordenada del punto medio del segmento $\overline{MR}$.

5) Señale sobre la recta numérica los puntos "x", para los cuales se cumple:

a) $x \geq 0$ b) $x < 3$ c) $x \leq \frac{5}{2}$ d) $2 > x > -1$ e) $x^2 \geq 1$

4.2. COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES EN EL PLANO

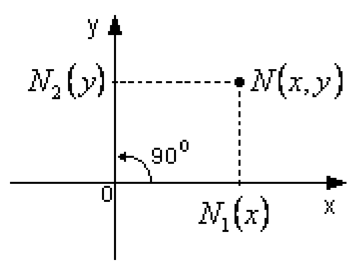
Recordemos el capítulo I que el Producto Cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ genera todo el Plano Cartesiano, en el que se han considerado 2 ejes o rectas numéricas (en los que generalmente las unidades de medida se toman iguales) perpendiculares entre si cuyo origen de coordenadas coinciden, al eje horizontal se le llama eje de las abscisas o eje x, al eje vertical se le llama eje de las ordenadas o eje y, quedando así definidas 4 regiones llamadas cuadrantes I, II, III y IV como se muestra en la figura.



La posición de cualquier punto sobre el Plano Cartesiano queda totalmente determinada cuando se conocen sus 2 coordenadas escribiéndose así: (x, y). En primer lugar se anota la <u>abscisa</u> (la x) y en segundo lugar se anota la <u>ordenada</u> (la y).

Tomemos sobre el plano un punto cualquiera N y tracemos desde él perpendiculares a los ejes, los puntos de intersección N_1 y N_2 se les llama proyecciones del punto N sobre los ejes coordenados, al punto N_1 le corresponde un número determinado x (su coordenada sobre este eje x), al punto N_2 le corresponde un número determinado y (su coordenada en este eje y). De esta manera, a cada punto situado sobre el plano coordenado le corresponden dos números x e y, llamados coordenadas rectangulares cartesianas del punto N y viceversa, a cada pareja ordenada de números (x, y) le corresponde un punto del Plano Coordenado Cartesiano, a esto se le llama una correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de números (x, y).

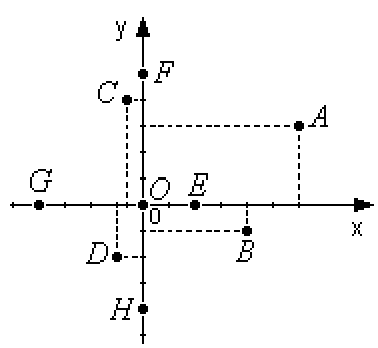
De este modo, las coordenadas rectangulares cartesianas de cualquier punto en el plano son las coordenadas de las proyecciones de este punto sobre los ejes coordenados.



EJEMPLOS

1) Localizar sobre el plano coordenado los siguientes puntos: $A(6,3)$, $B(4,-1)$, $C\left(-\frac{1}{2},4\right)$, $D(-1,-2)$, $E(2,0)$, $F(0,5)$, $G(-4,0)$, $H(0,-4)$, $O(0,0)$

<u>Solución</u>



2) Conteste cada uno de los siguientes incisos:

a) Sin dibujar, diga en qué cuadrante está situado el punto $A(2,-1)$.

b) Si la abscisa de un punto es negativa, ¿en qué cuadrante puede estar situado dicho punto?
c) Un punto situado sobre el eje x con coordenada -3, ¿cuáles son sus coordenadas en el plano?

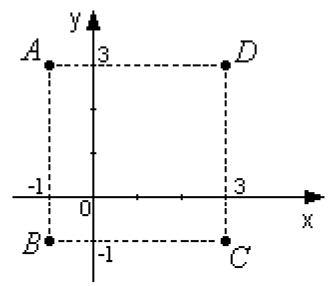
Solución

a) Cuarto cuadrante
b) En el tercero o el segundo cuadrante
c) $(-3,0)$

3) Halle cuatro puntos (cualesquiera) que sean los vértices de un cuadrado.

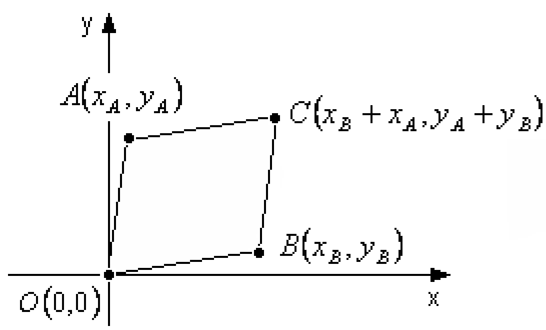
Solución

Por ejemplo los puntos $A(-1,3)$, $B(-1,-1)$, $C(3,-1)$, $D(3,3)$



4) Sobre el plano coordenado se dan los puntos $A(x_A, y_A)$, $O(0,0)$, $B(x_B, y_B)$, se pregunta ¿cuáles deben ser las coordenadas del punto C para que el cuadrilátero $AOBC$ sea un paralelogramo?

Solución



5) Conteste cada una de las siguientes preguntas:

a) ¿Qué signo tienen las coordenadas de cualquier punto situado en el cuadrante II y en el cuadrante IV?
b) ¿Cuál es el valor de la ordenada de cualquier punto situado sobre el eje x?

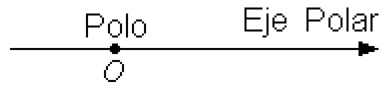
Solución

a) El signo de cualquier punto situado en el cuadrante II es $(-,+)$ y en el cuadrante IV es $(+,-)$.

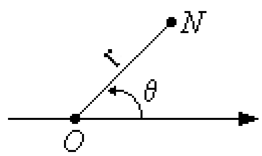
b) Cualquier punto situado sobre el eje x tiene ordenada cero $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R}$.

En el plano también se cuenta con otros sistemas de coordenadas que se diferencian de las cartesianas, por ejemplo, las Coordenadas Polares. En donde las coordenadas polares de un punto en el plano se puede definir de la siguiente manera:

Se traza en el plano un eje numérico horizontal llamado Eje Polar, el origen de coordenadas "O" se llama polo.

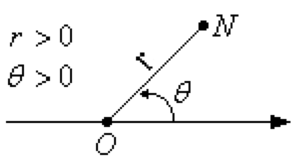


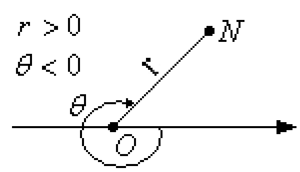
Un punto N cualquiera (diferente del origen o polo) sobre el plano polar queda determinado indicando dos números: "r" (radio polar) que es la distancia del punto N al polo O y θ que es el ángulo polar (es el ángulo de rotación que se mide desde el eje polar hasta el radio polar) y puede medirse en radianes o en grados, se acostumbra escribir como $N(r,\theta)$.



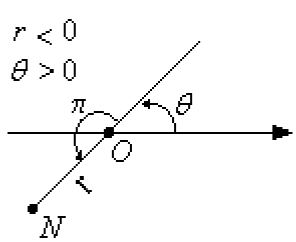
- El origen de coordenadas polares tiene coordenadas $O(0,0)$.

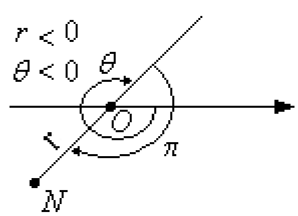
- Un ángulo polar positivo $(\theta > 0)$ se genera en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj  y es negativo $(\theta < 0)$ si es generado en el sentido de estas 





- Cuando el radio polar "r" es negativo $(r < 0)$, el punto N se localiza en sentido contrario a partir del origen, una vez que se ha generado el ángulo θ, esto es: girando $\theta + \pi$ ó $-(\theta + \pi)$.





- En el plano polar no podemos hablar de correspondencia biunívoca entre pares (r,θ) y puntos del plano polar ya que un mismo punto puede quedar representado por múltiples pares (r,θ) si agregamos al ángulo θ un múltiplo entero de 2π, es decir, $(r,\theta + 2n\pi)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

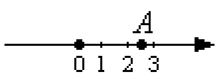
EJEMPLOS

Localice sobre un plano polar los siguientes puntos:

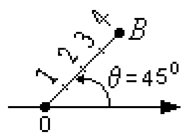
1) $A\left(\frac{5}{2},0^0\right)$ **2)** $B\left(4,45^0\right)$ **3)** $C\left(3,-\frac{\pi}{3}\right)$ **4)** $D\left(-2,\frac{2}{3}\pi\right)$ **5)** $E\left(-3,-60^0\right)$

<u>Solución</u>

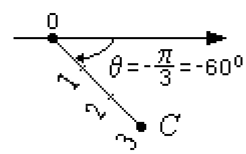
1)



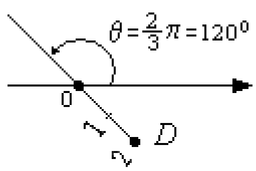
2)



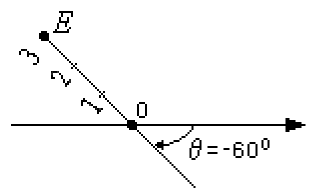
3)



4)



5)



EJERCICIOS

1) Localizar sobre el plano coordenado cartesiano los siguientes puntos:

$P_1\left(\frac{3}{2},2\right)$, $P_2(4,0)$, $P_3(-1.5,-3)$, $P_4(0,-5)$, $P_5(3,-1)$

2) Conteste cada uno de los siguientes incisos:

a) Si la ordenada de un punto es negativa, ¿en qué cuadrante puede estar situado dicho punto?

b) Un punto cualquiera situado sobre el eje y, ¿cuáles son sus coordenadas en el plano?

c) Sin dibujar, diga en qué cuadrante está situado el punto $(-3,-3)$

3) Halle 3 puntos (cualesquiera) que sean los vértices de un triángulo rectángulo.

4) Dados los puntos $A(-3,4)$ y $B(4,3)$, encuentre las coordenadas del punto $M(x_M, y_M)$ tal que sea el punto medio del segmento AB

5) Conteste cada una de las siguientes preguntas:

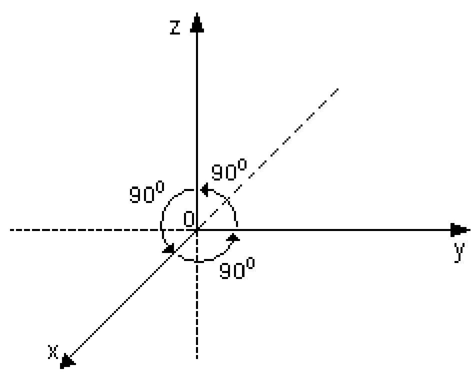
a) ¿Qué signo tienen las coordenadas de cualquier punto situado en los cuadrantes I y III?
b) ¿Cuál es el valor de la abscisa de cualquier punto situado sobre el eje y?

6) Localice sobre un plano polar los siguientes puntos:

a) $F\left(-\frac{5}{2},0^0\right)$, b) $G\left(-4,-45^0\right)$, c) $H\left(-3,\frac{\pi}{3}\right)$, d) $I\left(2,-\frac{2}{3}\pi\right)$, e) $J\left(3,60^0\right)$

4.3. COORDENADAS CARTESIANAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

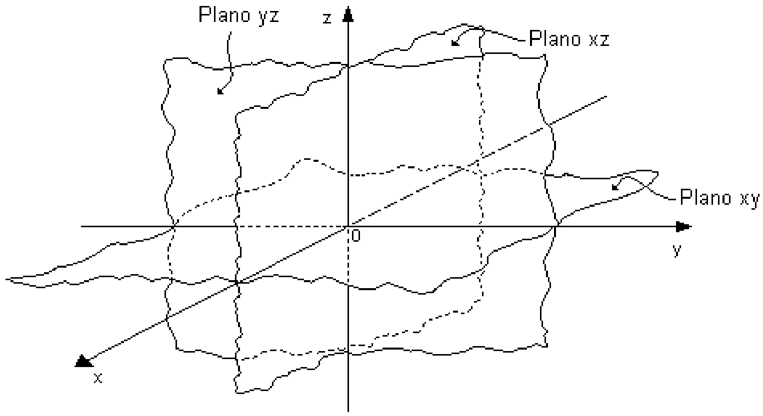
La posición de un punto cualquiera en el espacio de tres dimensiones se puede determinar por medio de coordenadas cartesianas rectangulares si consideramos 3 rectas o ejes numéricos perpendiculares entre si y coincidiendo sus orígenes como se muestra en la siguiente figura:



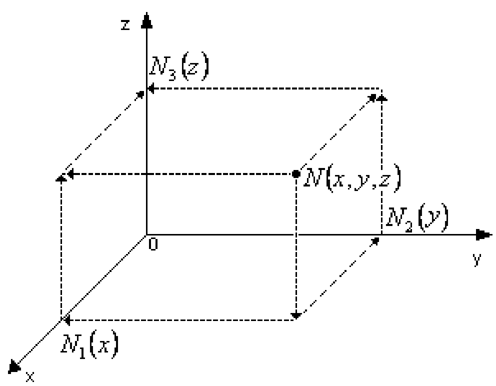
- Cualquier punto que se localice sobre este espacio tridimensional se escribe en forma ordenada (x, y, z) con $x, y, z \in \mathbb{R}$ primero la x (la abscisa), luego la y (la ordenada) y por último la z (la cota).

- El punto $O(0,0)$ es el origen de referencia de los tres ejes coordenados.

- En este espacio tridimensional quedan determinados 3 planos de coordenadas, el plano xy que pasa por los ejes x e y, donde se localizan todos los puntos de la forma $(x, y, 0)$, el plano xz que pasa por los ejes x y z, donde se localizan todos los puntos de la forma $(x, 0, z)$ y por último el plano yz que pasa por los ejes y y z donde se localizan todos los puntos de la forma $(0, y, z)$, quedando así dividido en 8 regiones (octantes), 4 arriba del plano xy y 4 abajo del mismo.



Una forma para obtener las coordenadas de un punto cualquiera $N(x,y,z)$ en el espacio es proceder a encontrar las proyecciones del punto N sobre los ejes coordenados, mediante las perpendiculares bajadas desde el punto N hasta los ejes coordenados: primero bajamos la proyección del punto N al plano xy, mediante paralelas a los ejes x y y obtenemos los puntos N_1 y N_2, con estos puntos y el punto N formamos un paralelepípedo como se muestra en la figura, para obtener el punto N_3, las coordenadas de N_1, N_2 y N_3 son las coordenadas de $N(x,y,z)$.

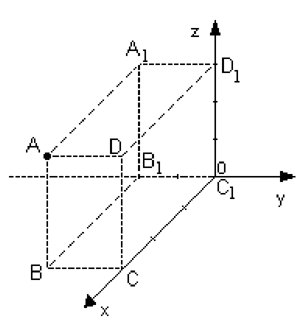


Recíprocamente, cualquier punto de coordenadas (x,y,z) le corresponde un punto del espacio tridimensional y así podemos decir que se ha establecido una correspondencia biunívoca entre puntos del espacio y ternas ordenadas de números reales.

EJEMPLOS

1) Dibujar en el espacio tridimensional la ubicación del punto de coordenadas $A(3,-2,3)$

<u>Solución</u>



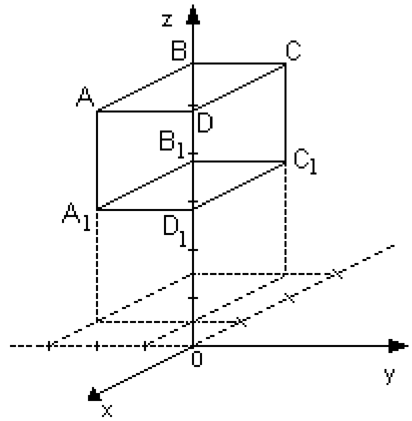
2) Encontrar las coordenadas de todos los vértices del paralelepípedo del ejemplo anterior.

Solución

$A_1(0,-2,3)$, $B_1(0,-2,0)$, $C_1(0,0,0)$, $D_1(0,0,3)$, $B(3,-2,0)$, $C(3,0,0)$, $D(3,0,3)$, $A(3,-2,3)$

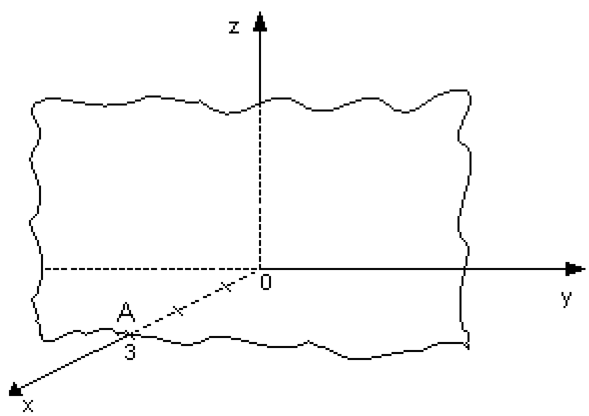
3) Los puntos de coordenadas $A(-1,-3,4)$, $B(-3,-3,4)$, $C(-3,-1,4)$, $D(-1,-1,4)$, $A_1(-1,-3,2)$, $B_1(-3,-3,2)$, $C_1(-3,-1,2)$, $D_1(-1,-1,2)$ son los vértices de un cubo, dibujarlo.

Solución



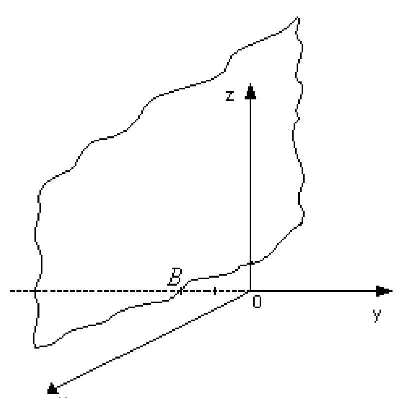
4) Dibujar un plano que pase por el punto $A(3,0,0)$ y que sea paralelo al plano yz.

Solución



5) Dibujar un plano que pase por el punto $B(0,-2,0)$ y sea paralelo al plano xz.

Solución



EJERCICIOS

1) Dibuje en el espacio tridimensional la ubicación del punto de coordenadas $T(2,3,3)$

2) Obtener las coordenadas de todos los vértices del paralelepípedo del ejercicio anterior.

3) Los puntos de coordenadas $A(2,0,2)$, $B(0,0,2)$, $C(0,3,2)$, $D(2,3,2)$, $E(0,4,0)$, $F(2,4,0)$, $A_1(2,0,0)$, $B_1(0,0,0)$ son los vértices de un trapezoide, dibújelo.

4) Dibujar un plano que pase por el punto $P(0,0,3)$ y que sea paralelo al plano xy

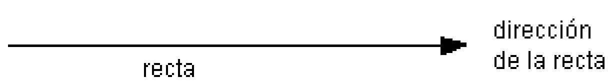
5) Dibujar un plano que pase por los puntos $Q(2,0,0)$, $R(0,3,0)$ y $S(0,0,2)$

4.4. EN LA RECTA: SEGMENTO DIRIGIDO. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE AL SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Hasta ahora, el método de coordenadas en matemáticas nos ha permitido determinar numéricamente la posición de un punto cualquiera sobre una línea recta, en el plano y en el espacio tridimensional, esto nos da la posibilidad de estudiar diversos tipos de problemas geométricos y de figuras en general, representándolos numéricamente y estudiarlos por medio de álgebra.

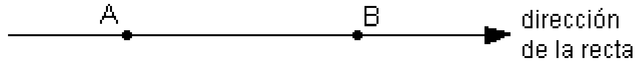
SEGMENTO DIRIGIDO

Toda recta tiene dos direcciones contrarias, cuando se elige una de ellas se le llama recta orientada, cuya dirección queda bien determinada y es costumbre marcarla por medio de una flecha.



Un segmento de recta es una parte de esta, limitada por dos puntos llamados extremos del segmento, llamando a uno de ellos el primero y al otro el segundo y el primero recibe el nombre de origen (o inicial) y el segundo se llama final del segmento. Un segmento de recta cuyos extremos se han ordenado como se ha dicho se llama segmento dirigido y se denotan mediante letras cuyo orden como se ha dicho es muy importante, por ejemplo, el segmento dirigido $\overline{AB}$ indica que el origen es A y el final es B y el segmento dirigido $\overline{BA}$ es diferente del $\overline{AB}$ pues son de sentidos contrarios y de diferente signo.

Geométricamente en un segmento dirigido se deben determinar dos direcciones, la del propio segmento y la de la recta que lo contiene.



La dirección del segmento $\overline{AB}$ es diferente a la dirección del segmento $\overline{BA}$ o sea $\overline{AB} \neq \overline{BA}$

Para obtener la distancia dirigida del segmento $\overline{AB}$, la regla es obtener la diferencia entre el punto final del segmento y el punto inicial, o sea: $\overline{AB} = x_B - x_A$ o $\overline{BA} = x_A - x_B$

EJEMPLOS

Obtener la distancia dirigida $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ en cada inciso:

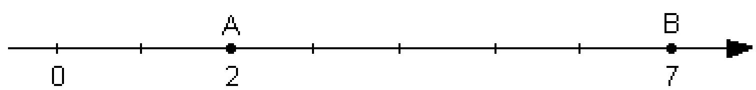
1) $A(2),\ B(7)$ **2)** $A(-3),\ B(5)$

3) $A(-8),\ B(-3)$ **4)** $A(6),\ B(-2)$

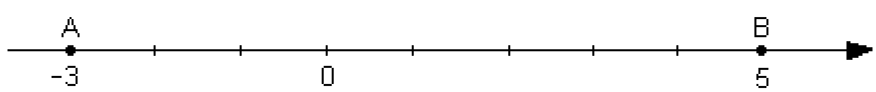
5) $A(-1),\ B(-6)$

<u>Solución</u>

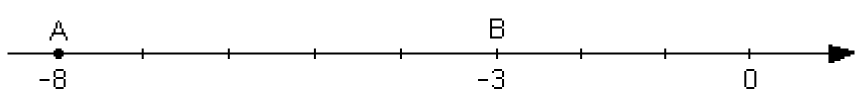
1) $\overline{AB} = x_B - x_A = 7 - 2 = 5$; $\overline{BA} = x_A - x_B = 2 - 7 = -5$



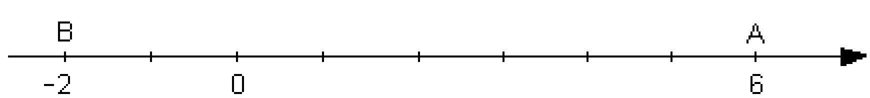
2) $\overline{AB} = x_B - x_A = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$; $\overline{BA} = x_A - x_B = -3 - 5 = -8$



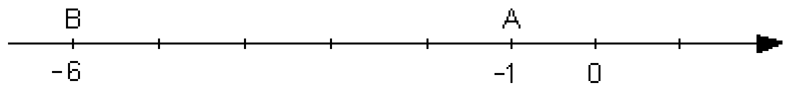
3) $\overline{AB} = x_B - x_A = -3 - (-8) = -3 + 8 = 5$; $\overline{BA} = x_A - x_B = -8 - (-3) = -8 + 3 = -5$



4) $\overline{AB} = x_B - x_A = -2 - 6 = -8$; $\overline{BA} = x_A - x_B = 6 - (-2) = 6 + 2 = 8$



5) $\overline{AB} = x_B - x_A = -6-(-1) = -6+1 = -5$; $\overline{BA} = x_A - x_B = -1-(-6) = -1+6 = 5$



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

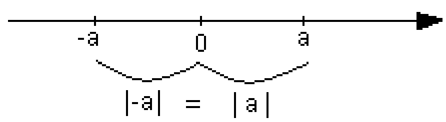
Consideremos dos puntos cualesquiera sobre un eje numérico determinados por sus coordenadas $A(x_A)$ y $B(x_B)$, la distancia entre el punto A y el punto B es la misma que la distancia entre el punto B y el punto A y esta se representa con el valor absoluto de la diferencia de coordenadas de los puntos A y B, esto es:

$$d(AB) = d(BA) = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

Nota: No olvidar que el valor absoluto de todo número real es no negativo o sea que si $a \in \mathbb{R}$ entonces: $|a| = a$ si $a \geq 0$

$|a| = -a$ si $a < 0$

y gráficamente significa la distancia desde el punto a hasta el origen de coordenadas, por lo tanto los puntos a y $-a$ están a la misma distancia del origen de coordenadas.



EJEMPLOS

En cada inciso hallar la distancia entre los puntos A y B

1) $A(-5)$, $B(-1)$, **2)** $A(-3)$, $B(3)$

3) $A(0)$, $B(-5)$, **4)** $A(7)$, $B(3)$

5) $A(4)$, $B(4)$

Solución

1) $d(AB) = |x_B - x_A| = |-1-(-5)| = |-1+5| = |4| = 4$
$d(BA) = |x_A - x_B| = |-5-(-1)| = |-5+1| = |-4| = 4$

se tiene que $d(AB) = d(BA) = 4$

2) $d(AB) = |x_B - x_A| = |3-(-3)| = |3+3| = |6| = 6$

3) $d(AB) = |x_B - x_A| = |-5-(0)| = |-5| = 5$

4) $d(AB) = |x_B - x_A| = |3-7| = |-4| = 4$

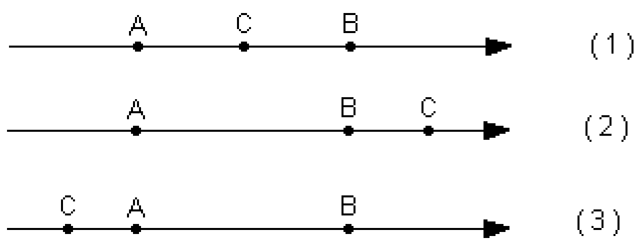
5) $d(AB) = |x_B - x_A| = |4-4| = |0| = 0$

COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE AL SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Supongamos tres puntos distintos sobre una recta numérica determinados por sus coordenadas $A(x_A)$, $B(x_B)$ y $C(x_C)$, consideremos el punto $A(x_A)$ el origen de un segmento dirigido, el punto $B(x_B)$ el final del segmento y el punto $C(x_C)$ el punto divisorio.

La razón en la que el punto "C" divide al segmento dirigido $\overline{AB}$ se designa con la letra "r" y se escribe $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$

Las posibilidades de ubicación del punto "C" respecto al segmento $\overline{AB}$ pueden ser las siguientes:



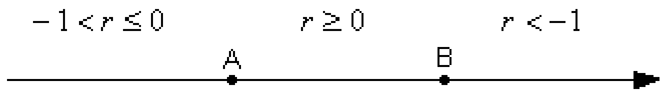
Esto quiere decir que el punto "C" en el caso (1) divide al segmento AB interiormente y en los casos (2) y (3) lo divide exteriormente y en cualquiera de los 3 casos la razón $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ es la misma.

- "r" puede tomar cualquier valor real: $r \in \mathbb{R}$ o $r \in (-\infty, \infty)$.
- El valor "r" será positivo si el punto "C" se localiza dentro del segmento $\overline{AB}$ y será negativo cuando "C" se encuentre fuera del segmento $\overline{AB}$.
- Si el punto "C" coincide con el punto A del segmento dirigido $\overline{AB}$ el valor de $r = 0$ y si coincide con el punto B, el valor de r no está definido (se puede representar con el símbolo $r = \infty$).
- Si el valor de $r = -1$, no existe solución.

El problema de la división de un segmento en una razón "r" tiene una sola y única solución (excepto cuando $r = -1$ como ya se dijo).

A cada valor "r" le corresponde en la recta numérica que contiene al segmento $\overline{AB}$ un cierto punto y recíprocamente, a esto recordemos, se llama una correspondencia biunívoca.

La forma en que se distribuyen los diferentes valores de "r" gráficamente de acuerdo a la posición del punto "C" es:



De acuerdo al sistema de coordenadas, analíticamente se tiene:

$$\text{Si} \quad r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \quad \cdots \text{(I)}$$

despejando "x_C" se tiene:

$$r(x_B - x_C) = x_C - x_A$$
$$rx_B - rx_C = x_C - x_A$$
$$rx_B + x_A = x_C + rx_C$$
$$rx_B + x_A = (1 + r)x_C$$
$$x_C = \frac{rx_B + x_A}{1 + r} \quad \cdots \text{(II)}$$

Aquí tenemos dos fórmulas, la (I) permite determinar "r" a través de x_A, x_B y x_C y la (II) permite determinar "x_C" a través de r, x_A y x_B, dándonos cuenta porqué $r \neq -1$, ya que no podemos dividir entre cero.

EJEMPLOS

En cada inciso, obtener la coordenada del punto "C" que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón dada.

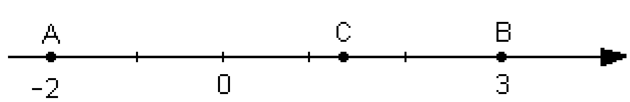
1) $A(-2)$, $B(3)$, $r = 2$

Solución

Analíticamente aplicando la fórmula (II) $\cdots$ $x_C = \dfrac{rx_B + x_A}{1 + r}$

sustituyendo valores: $x_C = \dfrac{(2)(3) + (-2)}{1 + 2} = \dfrac{6 - 2}{3} = \dfrac{4}{3}$

gráficamente se tiene:



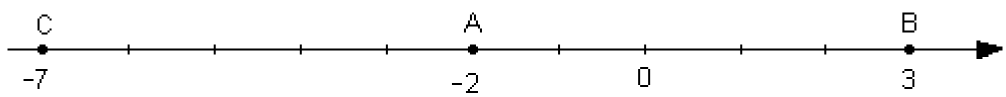
¿Esto qué significa?, observa que la distancia que hay de A a C son $\frac{10}{3}$ y la distancia de C a B son $\frac{5}{3}$, entonces la relación de distancias $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}} = 2$ que es la razón dada.

2) $A(-2),\ B(3),\ r = -\frac{1}{2}$

Solución

En la misma forma $x_C = \frac{rx_B + x_A}{1+r}$

$$x_C = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(3) + (-2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2} - 2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{4}{2}}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = -7$$



Si $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$ que es la razón dada.

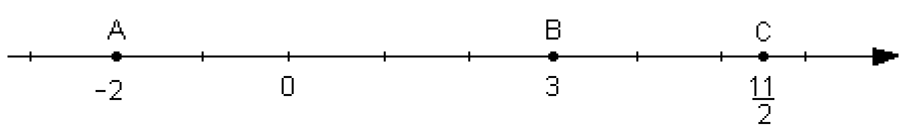
3) $A(-2),\ B(3),\ r = -3$

Solución

$$x_C = \frac{rx_B + x_A}{1+r}$$

sustituyendo valores:

$$x_C = \frac{(-3)(3) + (-2)}{1 + (-3)} = \frac{-9-2}{1-3} = \frac{-11}{-2} = \frac{11}{2} = 5.5$$



Si $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{\frac{15}{2}}{-\frac{5}{2}} = -3$ que es la razón dada.

En cada inciso obtener la razón en que el punto "C" divide al segmento $\overline{AB}$

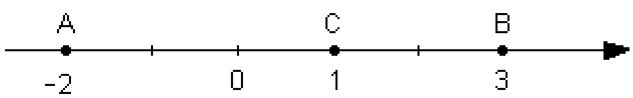
4) $A(-2),\ B(3),\ C(1)$

<u>Solución</u>

Aplicando la fórmula (I) ••• $r = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$

sustituyendo valores: $r = \dfrac{1-(-2)}{3-1} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$

gráficamente:



midiendo distancias:

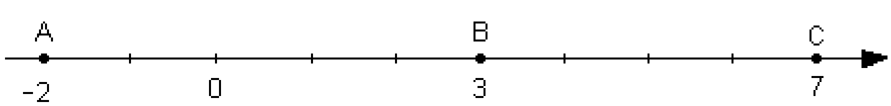
$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{3}{2}$ que es la razón calculada.

5) $A(-2),\ B(3),\ C(7)$

<u>Solución</u>

De la misma manera:

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{7-(-2)}{3-7} = \frac{7+2}{-4} = \frac{9}{-4}$$



con distancias:

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{9}{-4} = -\dfrac{9}{4}$ que es la razón calculada.

EJERCICIOS

En cada inciso, obtenga la distancia dirigida $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$

1) $A(4),\ B\left(-\frac{5}{2}\right)$	**4)** $A(0),\ B(5)$
2) $A(2.5),\ B(8)$	**5)** $A(5),\ B(-2)$
3) $A\left(-\frac{16}{3}\right),\ B(-1)$	

En cada inciso obtenga la distancia entre los puntos T y N.

6) $T(7),\ N(-2)$	**9)** $T(3.5),\ N(8)$
7) $T\left(-\frac{3}{4}\right),\ N(3)$	**10)** $T(-2),\ N(4)$
8) $T(-5),\ N(0)$	

En cada inciso, obtenga la coordenada del punto "C" que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón dada.

11) $A(3),\ B(-2),\ r=1$	**13)** $A(-5),\ B(2),\ r=-2$
12) $A(2),\ B(7),\ r=-\frac{1}{3}$	

En cada inciso, obtenga la razón en que el punto "C" divide al segmento $\overline{AB}$.

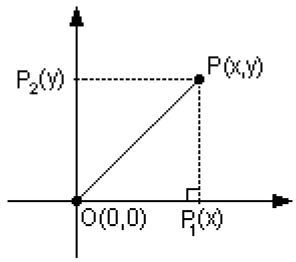
14) $A\left(-\frac{3}{2}\right),\ B(2.5),\ C(4)$	**15)** $A(-2),\ B(-4),\ C(-5)$

4.5. EN EL PLANO: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. COORDENADAS DE UN PUNTO QUE DIVIDE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Encontrar la distancia entre 2 puntos del plano conocidas sus coordenadas, requiere de un procedimiento algebraico que con solo indicar las operaciones que se deben realizar con los números dados (las coordenadas de los 2 puntos) y el orden en que estas se deben efectuar se pueda obtener el número buscado (la distancia entre los puntos).

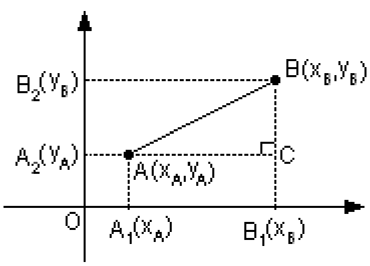
Para mostrar esto, es de gran ayuda recurrir al dibujo del problema empezando por el más sencillo, que es el que uno de los puntos dados sea el origen de coordenadas y el otro punto sea cualquier otro $P(x,y)$.



P_1 y P_2 son las proyecciones del punto P sobre los ejes coordenados. La distancia del origen O a P_1 es "x" ($d(OP_1)=x$) y la distancia de P_1 a P es "y" ($d(P_1P)=y$).
El triángulo OP_1P es rectángulo y por el Teorema de Pitágoras:

$$d(OP)=\sqrt{[d(OP_1)]^2+[d(P_1P)]^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

Repitiendo el mismo razonamiento para el caso general, es decir, cuando ninguno de los 2 puntos coincida con el origen de coordenadas se tiene que:



$$d(AB)=\sqrt{[d(AC)]^2+[d(CD)]^2}$$

$$d(AB)=\sqrt{[d(A_1B_1)]^2+[d(A_2B_2)]^2}$$

$$d(AB)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

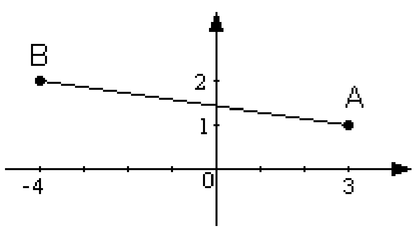
o también $$d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Nota: Observar que el orden correcto de las operaciones es muy importante para evitar errores. Si los puntos A y B quedan ubicados en cualquier lugar del plano de coordenadas, la fórmula no cambia.

EJEMPLOS

1) Obtener la distancia entre los puntos $A(3,1)$ y $B(-4,2)$

Solución



$$d(AB)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{[3-(-4)]^2+(1-2)^2}$$

$$d(AB)=\sqrt{(7)^2+(-1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}\approx 7.07$$

o en el otro orden:

$$d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-4-3)^2+(2-1)^2}$$

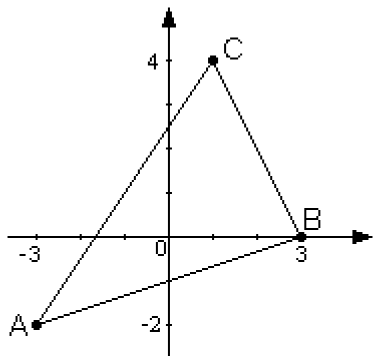
$$d(AB)=\sqrt{(-7)^2+(1)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}\approx 7.07$$

Este resultado quiere decir que de acuerdo a la unidad de medida elegida, la distancia del punto A al punto B es de 7.07 unidades aproximadamente.

2) Los puntos $A(-3,-2)$, $B(3,0)$ y $C(1,4)$ son los vértices de un triángulo, obtener su perímetro.

Solución

Sabemos que el perímetro de un triángulo es igual a la suma de las longitudes de sus lados: $P = d(AB) + d(BC) + d(AC)$.



$$d(AB) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2-0)^2}$$

$$d(AB) = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$d(BC) = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (0-4)^2}$$

$$d(BC) = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

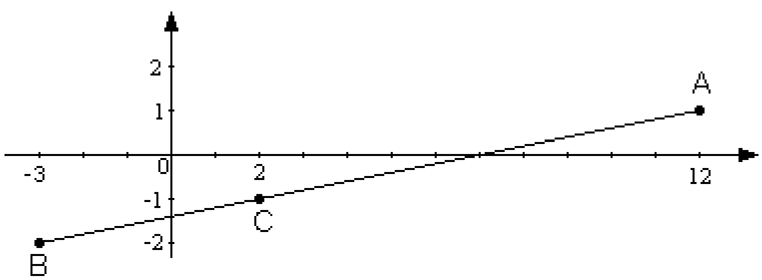
$$d(AC) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [4-(-2)]^2}$$

$$d(AC) = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$P = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{13} \approx 18.01$$

3) Si los puntos $A(12,1)$, $B(-3,-2)$ y $C(2,-1)$ se ubican sobre una misma linea recta, demostrarlo.

Solución



Con ayuda de la figura del problema, bastaría comprobar que la distancia de B a C más la distancia de C a A es igual a la distancia de B a A, o sea:

$$d(BC) + d(CA) = d(BA)$$

$$\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} + \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$\sqrt{[2-(-3)]^2+[-1-(-2)]^2}+\sqrt{(12-2)^2+[1-(-1)]^2}=\sqrt{[12-(-3)]^2+[1-(-2)]^2}$$

$$\sqrt{25+1}+\sqrt{100+4}=\sqrt{225+9} \quad ; \quad \sqrt{26}+\sqrt{104}=\sqrt{234}$$

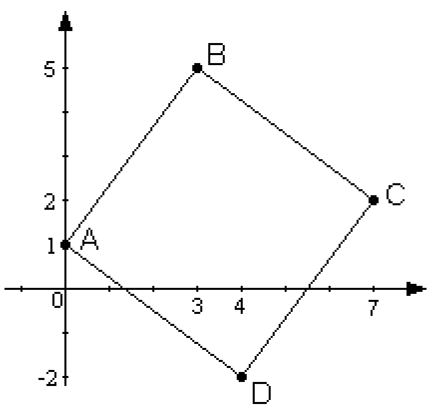
$$\sqrt{26}+2\sqrt{26}=3\sqrt{26} \quad ; \quad 3\sqrt{26}=3\sqrt{26}$$

Por lo tanto A, B y C sí están alineados o lo que es lo mismo, son colineales.

4) Verificar que los puntos $A(0,1)$, $B(3,5)$, $C(7,2)$ y $D(4,-2)$ son los vértices de un cuadrado.

Solución

Es importante señalar que si intentamos resolver un problema geométrico de esta naturaleza donde se piden ciertas magnitudes, midiéndolas con una regla directamente sobre el dibujo del problema lo más seguro es que se obtienen errores, por esto, se recurre al análisis (álgebra) que si nos proporciona resultados que se pueden considerar exactos, auxiliándonos con la figura para definir criterios de solución.



En este caso basta comprobar que las distancias $d(AB)=d(DC)=d(BC)$, pues la distancia $d(AD)$ estaría obligada por construcción a ser igual que las otras 3.

$$d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3-0)^2+(5-1)^2}$$

$$d(AB)=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$d(DC)=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2}=\sqrt{(7-4)^2+[2-(-2)]^2}$$

$$d(DC)=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

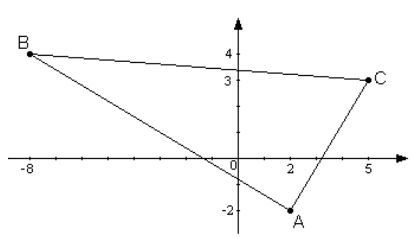
$$d(BC)=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(7-3)^2+(2-5)^2}$$

$$d(BC)=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

Por lo tanto sí es un cuadrado.

5) Verificar que los puntos $A(2,-2)$, $B(-8,4)$ y $C(5,3)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

Solución



Apoyándonos con la figura observamos que bastaría comprobar con el Teorema de Pitágoras que:

$$[d(AB)]^2+[d(AC)]^2=[d(BC)]^2$$

$$[d(AB)]^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-8-2)^2 + [4-(-2)]^2 = 100 + 36 = 136$$

$$[d(AC)]^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (5-2)^2 + [3-(-2)]^2 = 9 + 25 = 34$$

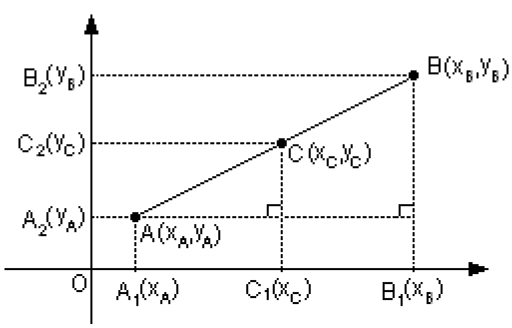
$$[d(AB)]^2 + [d(AC)]^2 = 136 + 34 = 170$$

$$[d(BC)]^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = [5-(-8)]^2 + (3-4)^2 = 169 + 1 = 170$$

luego entonces sí es un triángulo rectángulo y su ángulo recto (90^0) se localiza en el vértice A.

COORDENADAS DE UN PUNTO QUE DIVIDE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA.

Consideremos el segmento dirigido $\overline{AB}$ y un punto C perteneciente al mismo segmento, las proyecciones de estos 3 puntos sobre los ejes coordenados son A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2. Para obtener las coordenadas del punto $C(x_C, y_C)$ que divida al segmento $\overline{AB}$ según la razón "r", el procedimiento es una extensión del problema de la sección 4.4 anterior con exactamente las mismas consideraciones con las proyecciones de los tres puntos A, B y C sobre los ejes coordenados, como se muestra a continuación ayudándonos con la siguiente figura:



$$r = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$$

$$r = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{C_2B_2}} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}$$

despejando x_C y y_C de ambos respectivamente se tiene que:

$$x_C = \frac{rx_B + x_A}{1+r} \quad \text{y} \quad y_C = \frac{ry_B + y_A}{1+r}$$

Que son las coordenadas del punto $C(x_C, y_C)$ que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón "r".

- Cuando la razón $r = 1$ el problema se convierte en el caso particular de que el punto "C" es el <u>PUNTO MEDIO</u> del segmento $\overline{AB}$ como sigue:

$$x_C = \frac{rx_B + x_A}{1+r} = \frac{(1)x_B + x_A}{1+1} = \frac{x_B + x_A}{2} \quad ; \quad y_C = \frac{ry_B + y_A}{1+r} = \frac{(1)y_B + y_A}{1+1} = \frac{y_B + y_A}{2}$$

Por lo tanto, en general las coordenadas del punto medio M de un segmento dirigido $\overline{AB}$ cuyos extremos son $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ son $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2}\right)$

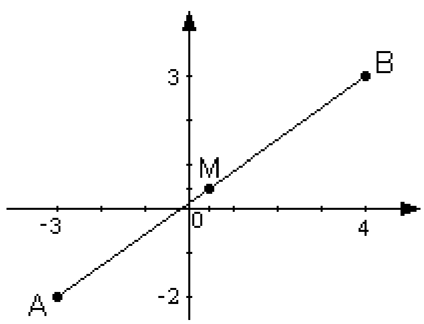
EJEMPLOS

1) Obtener las coordenadas del punto $M(x_M, y_M)$ que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón $r = 1$, cuyos extremos son $A(-3,-2)$ y $B(4,3)$.

Solución

$$x_M = \frac{rx_B + x_A}{1+r} = \frac{(1)(4)+(-3)}{1+1} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad y_M = \frac{ry_B + y_A}{1+r} = \frac{(1)(3)+(-2)}{1+1} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



o también:

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

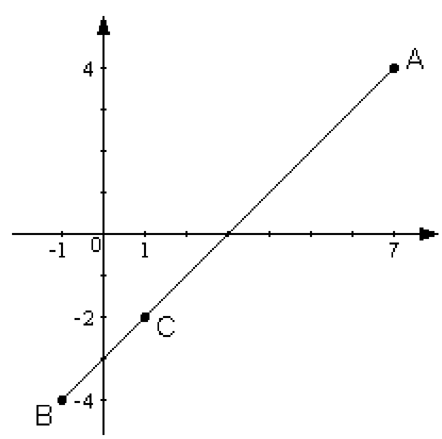
2) $A(7,4)$ y $B(-1,-4)$ son los extremos del segmento $\overline{AB}$, hallar la razón "r" en que el punto $C(1,-2)$ divide al segmento $\overline{AB}$.

Solución

Si $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$, $r = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}$

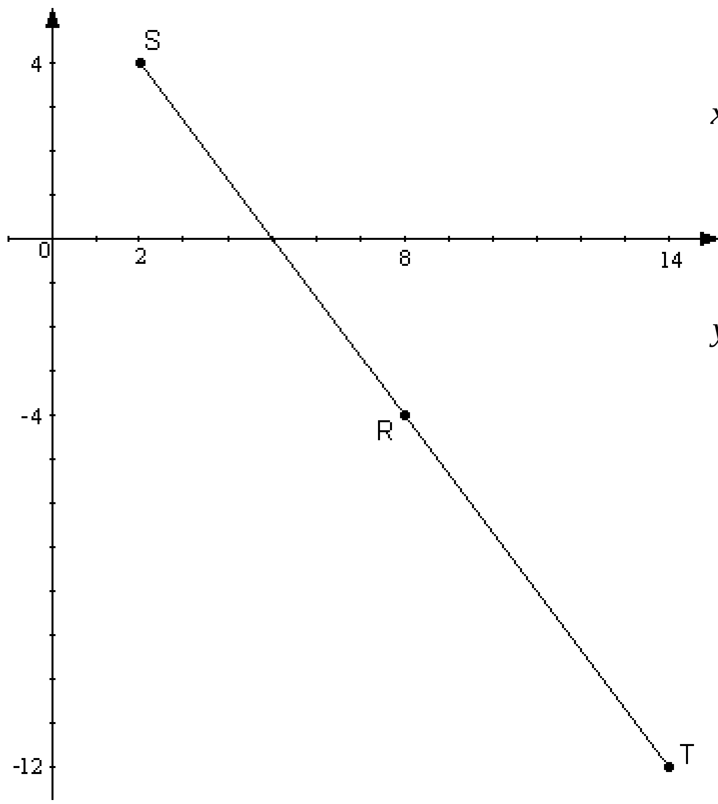
$$r = \frac{1-7}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3 \ , \quad r = \frac{-2-4}{-4-(-2)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

La razón es $r = 3$. No olvidar que este resultado indica que la magnitud de A a C es 3 veces la de C a B, o sea $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{3}{1}$



3) Los extremos de un segmento $\overline{RS}$ son $R(8,-4)$ y $S(2,4)$. Hallar el punto $T(x_T, y_T)$ que divide al segmento según la razón $r = -\frac{1}{2}$.

Solución



$$x_T = \frac{rx_S + x_R}{1+r} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(2)+8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{1}{2}} = 14$$

$$y_T = \frac{ry_S + y_R}{1+r} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(4)+(-4)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{-6}{\frac{1}{2}} = -12$$

$$T(14,-12)$$

La magnitud de T a S es dos veces la de R a T en sentidos contrarios por el signo negativo.

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{TS}} = -\frac{1}{2}$$

4) Con los mismos datos del problema anterior. Hallar las coordenadas del punto $V(x_V, y_V)$ que divide al segmento $\overline{RS}$ según la razón $r = -2$.

Solución

La respuesta podemos obtenerla aplicando las fórmulas: $x_V = \frac{rx_S + x_R}{1+r}$, $y_V = \frac{ry_S + y_R}{1+r}$

o aplicando directamente la razón $r = \frac{\overline{RV}}{\overline{VS}} = \frac{x_V - x_R}{x_S - x_V}$ y $r = \frac{y_V - y_R}{y_S - y_V}$ y despejando x_V y y_V

o sea:

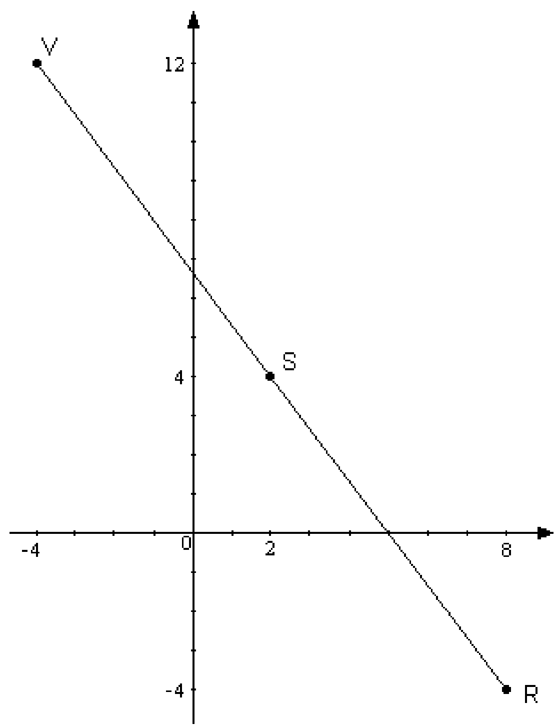
$$\left.\begin{aligned} x_V &= \frac{rx_S + x_R}{1+r} = \frac{(-2)(2)+8}{1-2} = \frac{-4+8}{-1} = \frac{4}{-1} = -4 \\ y_V &= \frac{ry_S + y_R}{1+r} = \frac{(-2)(4)+(-4)}{1-2} = \frac{-8-4}{-1} = \frac{-12}{-1} = 12 \end{aligned}\right\} V(-4,12)$$

o con la razón:

$r=\dfrac{x_V-x_R}{x_S-x_V}$; $-2=\dfrac{x_V-8}{2-x_V}$; despejando $x_V=-4$

$r=\dfrac{y_V-y_R}{y_S-y_V}$; $-2=\dfrac{y_V-(-4)}{4-y_V}$; despejando $y_V=12$

La magnitud de R a V es dos veces la de V a S en sentidos contrarios por eso es negativa.



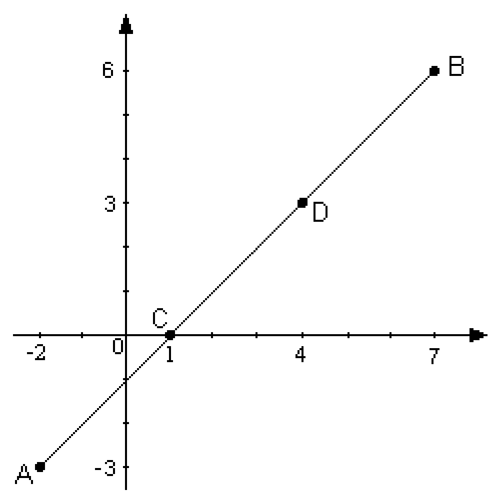
$$\frac{\overline{RV}}{\overline{VS}}=-\frac{2}{1}=-2$$

5) Obtener las coordenadas de dos puntos $C(x_C,y_C)$ y $D(x_D,y_D)$ que dividen internamente al segmento $\overline{AB}$ en 3 segmentos de igual magnitud, siendo $A(-2,-3)$ y $B(7,6)$.

<u>Solución</u>

Si $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\dfrac{1}{2}$, $x_C=\dfrac{rx_B+x_A}{1+r}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)(7)+(-2)}{1+\frac{1}{2}}$

$$x_C=\frac{\frac{7}{2}-\frac{4}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=1$$



$$y_C = \frac{ry_B + y_A}{1+r} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(6)+(-3)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{3-3}{\frac{3}{2}} = 0 \quad ; \qquad C(1,0)$$

Si $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = 2$; $x_D = \frac{rx_B + x_A}{1+r} = \frac{(2)(7)+(-2)}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$

$$D(4,3)$$

$$y_D = \frac{ry_B + y_A}{1+r} = \frac{(2)(6)+(-3)}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

Por lo tanto $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$

EJERCICIOS

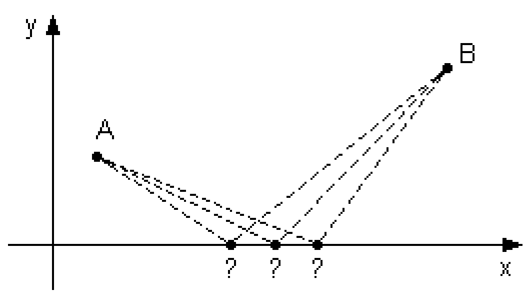
1) Obtenga la distancia entre los puntos $A(-3,5)$ y $B(0,0)$.

2) Los puntos $A(-4,-3)$, $B(-2,3)$, $C(1,4)$ y $D(4,-2)$, son los vértices de un cuadrilátero, obtenga la magnitud de sus diagonales.

3) Demostrar que los puntos $A(-2,-1), B(2,2)$ y $C(5,-2)$ son los vértices de un triángulo isóceles.

4) Los cuatro puntos $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(11,6)$ y $D(9,2)$ son los vértices de un paralelogramo, demuéstrelo.

5) ¿Cuál es la distancia más corta desde A a B, si antes de llegar a B hay que tocar en algún punto al eje x?



6) Obtenga las coordenadas de un punto $W(x_W, y_W)$ que divide al segmento $\overline{LM}$ según la razón $r = \frac{3}{5}$, siendo $L(-4,-2)$ y $M(5,-1)$.

7) Hallar la razón "r" en que el punto $P_1(0,4)$ divide al segmento $\overline{QR}$, donde $Q(3,6)$ y $R(-6,0)$.

8) Los extremos de un segmento $\overline{AB}$ son $A(-1,4)$, $B(3,-2)$. Hallar las coordenadas del punto $G(x_G, y_G)$ que divide al segmento en la razón $r = -\frac{1}{3}$.

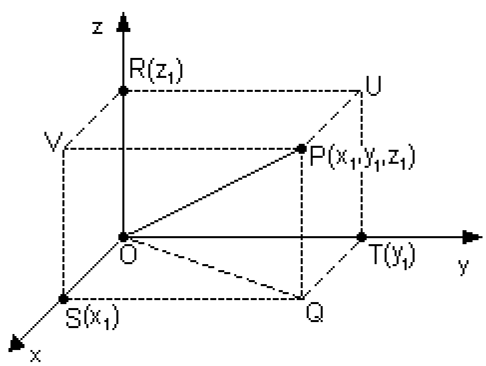
9) Obtener las coordenadas del punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento $\overline{CD}$ siendo $C(-3,4)$ y $D(5,-2)$.

10) Obtenga las coordenadas de tres puntos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ y $C(x_C, y_C)$ que dividen internamente al segmento $P_1(-2,3)$ y $P_2(6,-1)$ en 4 partes iguales.

4.6. EN EL ESPACIO: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

- Iniciemos por el caso más sencillo, el de la distancia entre cualquier punto en el espacio tridimensional $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y el origen de coordenadas $O(0,0)$, ayudándonos de la siguiente figura:



Por el Teorema de Pitágoras, en el triángulo rectángulo OQT se tiene que:

$$(OQ)^2 = (QT)^2 + (OT)^2$$

$$(OQ)^2 = x_1^2 + y_1^2$$

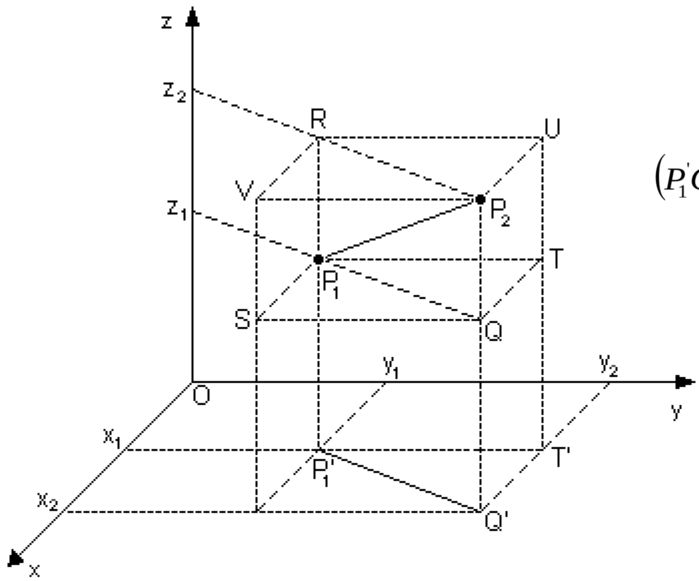
En el triángulo rectángulo OQP se tiene:

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (QP)^2$$

$$(OP)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

Por lo tanto, la distancia entre los puntos O y P es: $d(OP) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ...(I)

- En el caso más general, cuando los dos puntos son diferentes y ninguno coincide con el origen de coordenadas, sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ como se muestra en la siguiente figura:



Observemos que los triángulos rectángulos $P_1QT = P_1'Q'T'$ y por el Teorema de Pitágoras:

$$\left(P_1'Q'\right)^2 = (Q'T')^2 + \left(T'P_1'\right)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

En el triángulo rectángulo P_1P_2Q:

$$(P_1P_2)^2 = (P_1Q)^2 + (QP_2)^2$$

como $(P_1Q)^2 = \left(P_1'Q'\right)^2$

$$(P_1P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

La distancia entre P_1 y P_2 es: $d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ... (II)

Muchos de los resultados de la Geometría Analítica plana (dos dimensiones) se generalizan a la geometría del espacio tridimensional como en el caso de la sección 4.5 anterior y el presente 4.6.

EJEMPLOS

En cada inciso, encuentre la distancia entre los dos puntos que se dan.

1) $O(0,0,0)$, $P_1(-3,2,1)$

Solución

$$d(OP_1) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \approx 3.74$$

2) $P_1(-1,-2,-3)$, $P_2(2,3,-1)$

Solución

$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (3+2)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38} \approx 6.16$$

3) $P_1(2,0,3)$, $P_2(1,1,1)$

Solución

$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \approx 2.45$$

4) Los puntos $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$ y $C(-3,2,1)$ son los vértices de un triángulo ¿qué tipo de triángulo es?

Solución

$$d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(-4+1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{9+9+0}=\sqrt{18}$$

$$d(BC)=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}=\sqrt{(-3-0)^2+(2+4)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+36+1}=\sqrt{46}$$

$$d(AC)=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=\sqrt{(-3-3)^2+(2+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{36+9+1}=\sqrt{46}$$

Como la magnitud de los lados BC y AC son iguales, se trata de un triángulo isósceles.

5) Encontrar sobre el eje x un punto cuya distancia al punto $A(-3,8,4)$ sea igual a 12.

Solución

Si el punto que se busca está sobre el eje x, sus coordenadas deben ser de la forma $P(x,0,0)$, entonces la distancia de A a P debe ser 12 unidades:

$$d(AP)=\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2+(z_A-z_P)^2}=12$$

$$d(AP)=\sqrt{(-3-x)^2+(8-0)^2+(4-0)^2}=12 \quad ; \quad d(AP)=(-3-x)^2+(8-0)^2+(4-0)^2=144$$

$$d(AP)=9+6x+x^2+64+16=144 \quad ; \quad x^2+6x-55=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(1)(-55)}}{2(1)}=\frac{-6\pm\sqrt{256}}{2}=\frac{-6\pm 16}{2}$$

$$x_1=5 \quad , \quad x_2=-11$$

La solución son dos puntos sobre el eje x que cumplen con la condición pedida: $P_1(5,0,0)$ y $P_2(-11,0,0)$.

COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO SEGUN UNA RAZÓN DADA

Utilizando la misma figura anterior con la que obtuvimos la distancia entre dos puntos del espacio tridimensional, también podemos generalizar el problema de la sección 4.5 si consideramos dos puntos $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ que son los extremos del segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$ y un tercer punto $P(x, y, z)$ que divide al segmento según la razón "r" o sea $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ donde $r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$, $r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$, $r = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$ o despejando respectivamente a x, y y z:

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{1 + r} \quad ; \quad y = \frac{ry_2 + y_1}{1 + r} \quad ; \quad x = \frac{rz_2 + z_1}{1 + r}$$

EJEMPLOS

En cada inciso, obtener las coordenadas del punto $P(x, y, z)$ que divide al segmento $\overline{AB}$ según la razón dada.

1) $A(4,-2,3)$, $B(-2,3,-1)$; $r = \frac{3}{2}$

Solución

Si $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{3}{2}$; $\frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{3}{2}$; $\frac{x - 4}{-2 - x} = \frac{3}{2}$; $2x - 8 = -6 - 3x$; $5x = 2$; $x = \frac{2}{5}$

$\frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = \frac{3}{2}$; $\frac{y + 2}{3 - y} = \frac{3}{2}$; $2y + 4 = 9 - 3y$; $5y = 5$; $y = 1$

$\frac{z_P - z_A}{z_B - z_P} = \frac{3}{2}$; $\frac{z - 3}{-1 - z} = \frac{3}{2}$; $2z - 6 = -3 - 3z$; $5z = 3$; $z = \frac{3}{5}$

Las coordenadas del punto son $P\left(\frac{2}{5}, 1, \frac{3}{5}\right)$

2) $A(1,-1,1)$, $B(2,-3,2)$; $r = -\frac{1}{3}$

Solución

Si $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -\frac{1}{3}$; $\frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = -\frac{1}{3}$; $\frac{x - 1}{2 - x} = -\frac{1}{3}$; $3x - 3 = -2 + x$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$

$\frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = -\frac{1}{3}$; $\frac{y + 1}{-3 - y} = -\frac{1}{3}$; $3y + 3 = 3 + y$; $2y = 0$; $y = 0$

$\frac{z_P - z_A}{z_B - z_P} = -\frac{1}{3}$; $\frac{z - 1}{2 - z} = -\frac{1}{3}$; $3z - 3 = -2 + z$; $2z = 1$; $z = \frac{1}{2}$

Las coordenadas del punto son $P\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

3) $A(-4,8,6)$, $B(6,-4,-2)$; $r=-2$

<u>Solución</u>

Si $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=-2$; $\frac{x_P-x_A}{x_B-x_P}=-2$; $\frac{x+4}{6-x}=-2$; $x+4=-12+2x$; $4+12=2x-x$; $x=16$

$\frac{y_P-y_A}{y_B-y_P}=-2$; $\frac{y-8}{-4-y}=-2$; $y-8=8+2y$; $-8-8=2y-y$; $y=-16$

$\frac{z_P-z_A}{z_B-z_P}=-2$; $\frac{z-6}{-2-z}=-2$; $z-6=4+2z$; $-6-4=2z-z$; $z=-10$

Las coordenadas del punto son $P(16,-16,-10)$

4) Los vértices de un triángulo son $A(3,2,5)$, $B(1,-4,-3)$ y $C(-3,0,-1)$, obtener las coordenadas de los puntos medios de cada lado.

<u>Solución</u>

Punto medio del lado AB:

$\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$; $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$; $\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$

$$M_{AB}(2,-1,1)$$

Punto medio del lado BC:

$\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$; $\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-4+0}{2}=\frac{-4}{2}=-2$; $\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

$$M_{BC}(-1,-2,-2)$$

Punto medio del lado AC:

$\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3-3}{2}=0$; $\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+0}{2}=\frac{2}{2}=1$; $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$; $M_{AC}(0,1,2)$

5) Obtener las coordenadas de los extremos de un segmento $\overline{AB}$ que es dividido en tres partes iguales por los puntos $P(2,0,2)$ y $Q(5,-2,0)$.

Solución

Como los puntos P y Q son internos, podemos considerar las razones $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QP}}=1$ y $\dfrac{\overline{QP}}{\overline{PB}}=1$,

con la razón $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QP}}=1$, se tiene $\dfrac{x_Q-x_A}{x_P-x_Q}=1$; $\dfrac{5-x_A}{2-5}=1$; $5-x_A=-3$; $x_A=8$

$\dfrac{y_Q-y_A}{y_P-y_Q}=1$; $\dfrac{-2-y_A}{0+2}=1$; $-2-y_A=2$; $y_A=-4$

$\dfrac{z_Q-z_A}{z_P-z_Q}=1$; $\dfrac{0-z_A}{2-0}=1$; $-z_A=2$; $z_A=-2$

Las coordenadas del punto A son: $A(8,-4,-2)$, con la razón $\dfrac{\overline{QP}}{\overline{PB}}=1$, se tiene:

$\dfrac{x_P-x_Q}{x_B-x_P}=1$; $\dfrac{2-5}{x_B-2}=1$; $-3=x_B-2$; $x_B=-1$; $\dfrac{y_P-y_Q}{y_B-y_P}=1$; $\dfrac{0+2}{y_B-0}=1$; $2=y_B$; $y_B=2$

$\dfrac{z_P-z_Q}{z_B-z_P}=1$; $\dfrac{2-0}{z_B-2}=1$; $2=z_B-2$; $z_B=4$

Las coordenadas del punto B son: $B(-1,2,4)$

EJERCICIOS

1) Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0,0,0)$ a los puntos $P_1(-2,4,-4)$, $P_2(-5,10,3)$, $P_3(11,-4,3)$.

2) Obtener sobre el eje de las ordenadas un punto $P(x,y,z)$ que equidiste de los puntos $P_1(7,-3,1)$ y $P_2(-5,7,5)$.

3) Los puntos $A(-1,2,4)$, $B(2,-6,3)$ y $C(0,5,2)$ son los vértices de un triángulo, calcular la longitud de cada lado.

4) Dados los vértices de un triángulo $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ y $C(1,2-3)$ ¿qué tipo de triángulo es?

5) El centro de gravedad de una varilla de acero homogénea está en el punto $G(-1,1,5)$ y uno de sus extremos está en el punto $B(-1,-2,7)$, ¿cuáles son las coordenadas del otro extremo $A(x_A,y_A,z_A)$?

En cada inciso obtener las coordenadas del punto $P(x, y, z)$ que divide al segmento P_1P_2 según la razón dada:

6) $P_1(1,-2,-3)$, $P_2(-1,1,10)$; $r=-1$

7) $P_1(4,-2,-4)$, $P_2(-4,12,6)$; $r=1$

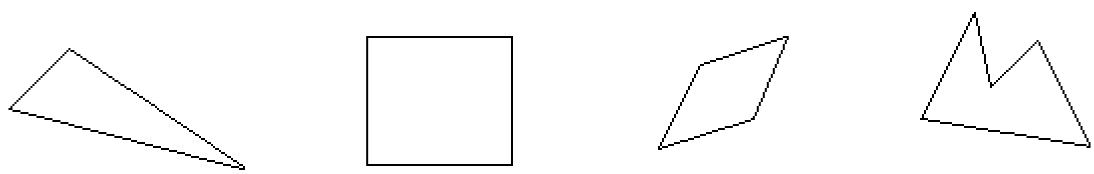
8) $P_1(10,-4,3)$, $P_2(10,15,16)$; $r=3$

9) $P_1(1,-3,8)$, $P_2(4,-1,1)$; $r=-\frac{1}{4}$

10) $P_1(3,-2,5)$, $P_2(-2,1,-3)$; $r=-3$

4.7. CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS POR SUS LADOS Y POR SUS ÁNGULOS

POLÍGONO se llama polígono a una porción de un plano limitada por segmentos de recta.

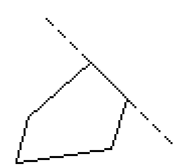


- Cada segmento de recta de un polígono se llama LADO.
- La abertura formada por 2 lados que parten de un mismo punto se llama ÁNGULO.
- El punto en el que concurren 2 lados de un ángulo se llama VÉRTICE.

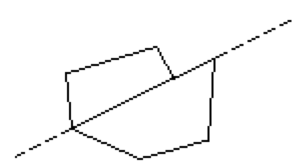
Podemos clasificar a los polígonos como sigue:

Por el Número de Lados: triángulos (3 lados), cuadriláteros (4 lados), pentágonos (5 lados), hexágonos (6 lados), heptágonos (7 lados), octágonos (8 lados), eneágonos (9 lados), decágonos (10 lados), endecágonos (11 lados), dodecágonos (12 lados), pentedecágonos (15 lados), icoságonos (20 lados), etc.

CONVEXOS: Si por cada uno de sus lados se traza una recta y prolongándola el polígono queda ubicado del mismo lado de la recta.



CONCAVOS: Si por alguno de sus lados se traza una recta y prolongándola el polígono queda ubicado en ambos lados de la recta.



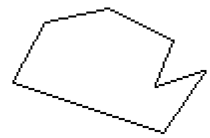
EQUILÁTEROS: Todos sus lados son de igual magnitud.

EQUIÁNGULOS: Todos sus ángulos son iguales.

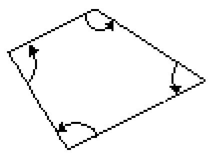
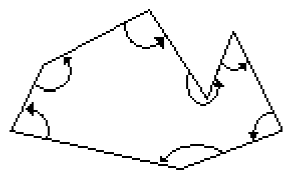
REGULARES: Son EQUILÁTEROS y EQUIÁNGULOS son ejemplos los triángulos equiláteros, los cuadrados, los pentágonos, los octágonos, etc.

IRREGULARES

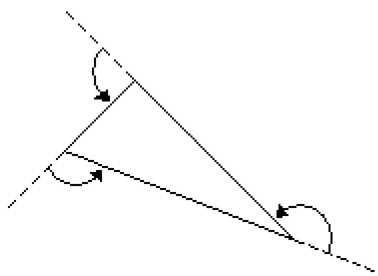
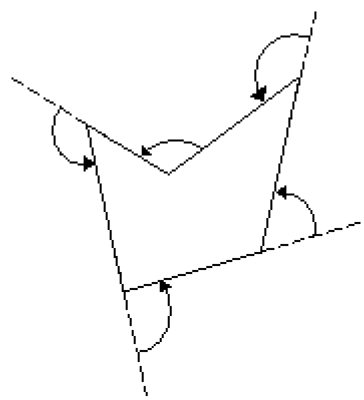
- CONVEXOS: Sus lados no todos son iguales, por ejemplo: triángulos isósceles y escalenos, rectángulos, paralelogramos, trapecios, etc.
- CÓNCAVOS: Como el siguiente:



- <u>Ángulo interior</u> de un polígono se forma por 2 lados consecutivos.

- <u>Ángulo exterior</u> de un polígono se puede formar prolongando un lado y trazarlo con el lado consecutivo:

- <u>El número de lados</u> de un polígono es igual al número de vértices o también igual al número de ángulos interiores.

- <u>La suma de los ángulos interiores</u> (Sai) de un polígono cualquiera se obtiene con la expresión: $Sai = 180^0(n-2)$; $n =$ número de lados.
- <u>La suma de los ángulos exteriores</u> de un polígono <u>convexo</u> es de 360^0.

- <u>Los ángulos interiores</u> de un polígono regular son iguales y sus ángulos exteriores también son iguales.

- <u>Diagonal</u> en un polígono convexo es un segmento de recta que une 2 vértices no consecutivos.

Los <u>triángulos</u> son una clase muy importante de polígonos y que podemos clasificar como sigue:

POR SUS LADOS Y ÁNGULOS

- Equiláteros (del latín significa "lados iguales"): tienen sus 3 lados iguales y sus 3 ángulos iguales.
- Isósceles (del griego significa "piernas iguales"): tienen 2 lados iguales y otro diferente y sus ángulos, 2 son iguales y el otro no.
- Escaleno (del griego significa "disparejo"): tienen sus 3 lados diferentes y sus ángulos también.

UNICAMENTE POR SUS ÁNGULOS

- Rectángulo: Uno de sus ángulos es recto (90^0)
- Oblicuángulo: Ninguno de sus ángulos es recto
- Acutángulo: Sus 3 ángulos son agudos (menores de 90^0)
- Obtusángulo: Uno de sus ángulos es mayor de 90^0

Otro tipo de polígono que también son una clase muy importante son los <u>cuadriláteros</u>, los podemos clasificar de acuerdo al paralelismo e igualdad de sus lados y ángulos opuestos como sigue:

CUADRILÁTEROS

- Escaleno: Sus 4 lados no son paralelos ni son iguales.
- Cometa: Dos pares de lados adyacentes son iguales.
- Trapezoide: Un par de lados opuestos son paralelos.
- Trapecio: (o trapezoide isósceles) sus lados no paralelos son iguales.
- Paralelogramo: Ambos pares de lados opuestos son paralelos.
- Rombo: Un paralelogramo con sus 4 lados iguales.
- Rectángulo: Un paralelogramo con sus 4 ángulos iguales.
- Cuadrado: Un rectángulo con sus 4 lados iguales.

EJEMPLOS

En cada inciso obtener la suma de los ángulos internos de cada polígono:

1) Triángulo

<u>Solución</u>

Los triángulos tienen 3 lados por lo que $Sai = 180^0(3-2) = 180^0$

2) Decágono

Solución

El decágono tiene 10 lados, entonces la $Sai = 180^0(10-2) = 1440^0$

3) Icoságono

Solución

Un icoságono tiene 20 lados, por lo tanto: $Sai = 180^0(20-2) = 3240^0$

4) Demuestre que la suma de los ángulos externos de un pentágono regular es de 360^0.

Solución

Un pentágono tiene 5 lados y 5 vértices, la suma de sus ángulos internos es: $Sai = 180^0(5-2) = 540^0$.

Cada vértice mide: $\frac{540^0}{5} = 108^0$.

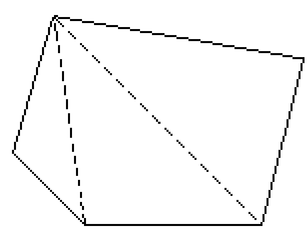
Cada ángulo externo mide: $180^0 - 108^0 = 72^0$

La suma de los ángulos externos es: $(72^0)(5) = 360^0$

5) Trace las diagonales desde cualquiera de los vértices de un polígono convexo de 5 lados y compruebe que se cumple la fórmula $N_d = n-3$; $n =$ número de lados.

Solución

Sea el siguiente polígono:



$N_d = 5-3 = 2$

Solo 2 diagonales

EJERCICIOS

1) ¿Qué clase de polígono es el que la suma de sus ángulos interiores es de 2340^0?

2) ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un octágono regular?

3) ¿Qué tipo de polígono regular es el que cada uno de sus ángulos internos mide 156^0?

4) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos externos de un dodecágono regular?

5) Si el ángulo interno de un polígono regular mide 156^0, ¿cuánto mide su ángulo externo?

4.8. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

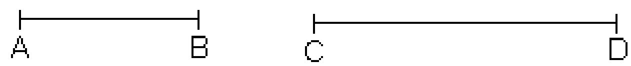
<u>CONGRUENCIA</u>. Dos objetos cualesquiera que son réplica exacta uno del otro, se dice que son congruentes.

- En geometría, dos figuras planas son congruentes si al ponerse juntas una con la otra coinciden exactamente en forma y tamaño (es decir, son iguales).

<u>SEMEJANZA</u>. Objetos que tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño, son semejantes.

- En geometría, todas las figuras que son congruentes, también son semejantes.

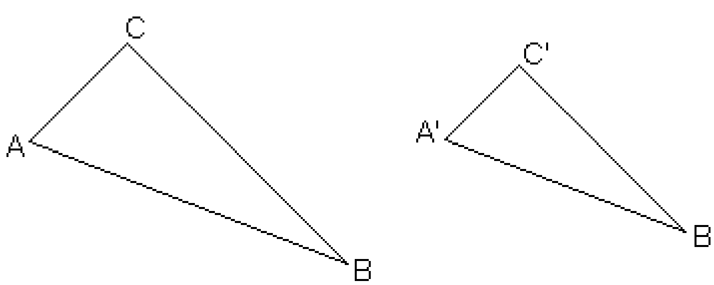
- Todos los segmentos rectilíneos son semejantes entre si (tienen la misma forma).



La razón de semejanza es: $\frac{CD}{AB}$

– Definición:

<u>Dos triángulos son semejantes</u>, si sus ángulos correspondientes son congruentes (iguales) y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.

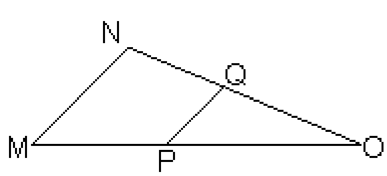


$$A = A' \quad ; \quad B = B' \quad ; \quad C = C'$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$ se lee "el triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$".

– En todo triángulo, toda recta paralela a un lado forma con los otros dos lados un triángulo semejante al original.



El $\Delta\, PQO \sim \Delta\, MNO$

– Una forma práctica de ver si dos triángulos son semejantes, es mediante las siguientes reglas:

a) (A.A.) Si tienen 2 ángulos respectivamente iguales.

b) (L.A.L.) Si dos de sus lados son respectivamente proporcionales y el ángulo que forman es igual.

c) (L.L.L.) Si 3 lados son respectivamente proporcionales.

EJEMPLOS

1) Un triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$, el lado $AB=6$, el $BC=8$ y el $AC=12$, en el triángulo $A'B'C'$ el lado $A'C'=8$, ¿cuánto miden los lados $A'B'$ y $B'C'$?

<u>Solución</u>

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ entonces la razón de sus lados correspondientes es:

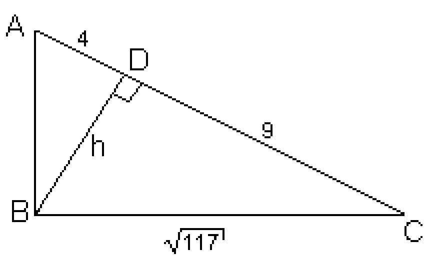
$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$ y sustituyendo valores:

$\frac{6}{A'B'}=\frac{8}{B'C'}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ separando igualdades se tiene:

$\frac{6}{A'B'}=\frac{3}{2}$; $A'B'=\frac{(6)(2)}{3}=4$; $\frac{8}{B'C'}=\frac{3}{2}$; $B'C'=\frac{(8)(2)}{3}=\frac{16}{3}$

2) En la siguiente figura se muestra el triángulo rectángulo ABC, aplicando el concepto de semejanza obtener las magnitudes de la altura h y del lado AB.

<u>Solución</u>



Como $\Delta BDC \sim \Delta DAB$ se tiene:

$\frac{DC}{BD}=\frac{BD}{AD}$; $\frac{9}{h}=\frac{h}{4}$; $(9)(4)=h^2$; $h^2=36$

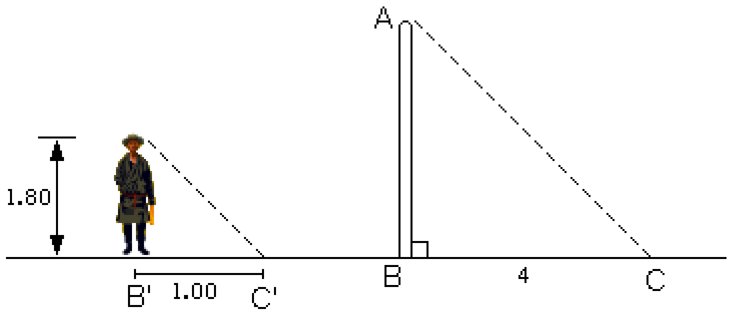
$h=\sqrt{36}$; $h=6$

Como $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ se tiene:

$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{BD}$; $\frac{AB}{4}=\frac{\sqrt{117}}{6}$; $AB=\frac{4\sqrt{117}}{6}$; $AB \approx 7.21$

3) Un señor de $1.80\,[m]$ de estatura proyecta un asombra de $1.00\,[m]$ a las $14:00\,[hr]$ y a la misma hora junto a el, un poste proyecta una sombra de $4.00\,[m]$, calcular la altura del poste.

<u>Solución</u>



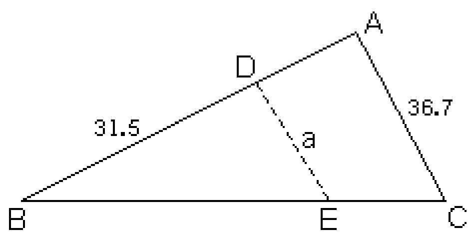
Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ entonces:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \; ; \; \frac{AB}{1.80} = \frac{4}{1} \; ; \; AB = \frac{(4)(1.80)}{1}$$

$$AB = 7.20\,[m]$$

4) En el triángulo ABC se traza una paralela al lado AC a 10 unidades del vértice A sobre el lado AB, calcular la magnitud de "a".

Solución



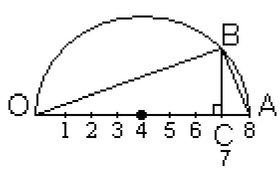
El $\Delta ABC \sim \Delta DBE$

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB} \; ; \; \frac{36.7}{a} = \frac{41.5}{31.5}$$

$$a = \frac{(36.7)(31.5)}{41.5} = 27.86$$

5) En la siguiente figura se muestra una semicircunferencia con un triángulo inscrito, demostrar que la magnitud BC es $\sqrt{7}$.

Solución



Apoyándonos en la propiedad geométrica que "todo triángulo inscrito en una semicircunferencia con el lado OA como diámetro y el vértice B en cualquier punto sobre la semicircunferencia, es un triángulo rectángulo".

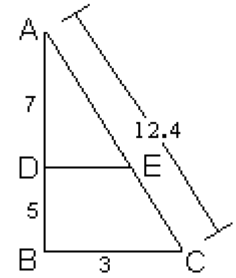
El método consiste en trazar una línea OA de longitud 8 unidades (una más de 7) haciendo centro a la mitad de OA (en el 4) se traza una semicircunferencia y por el punto que marca el 7 levantamos la perpendicular a OA hasta el punto B y por semejanza de triángulos:

$$\Delta OBC \sim \Delta BCA \; ; \; \frac{OC}{BC} = \frac{BC}{CA} \; ; \; (OC)(CA) = (BC)^2 \; ; \; (7)(1) = (BC)^2 \; ; \; BC = \sqrt{7}$$

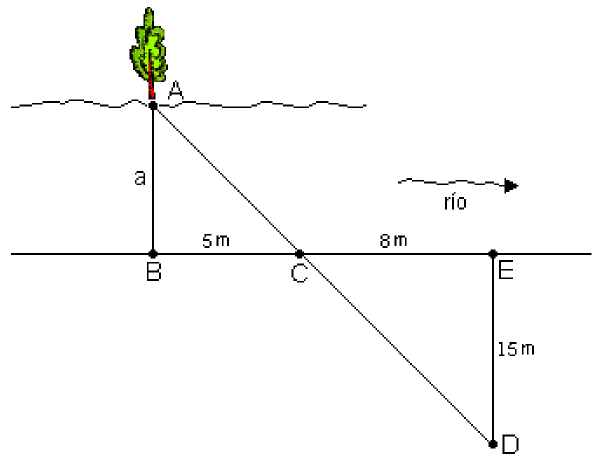
EJERCICIOS

1) Los triángulos JKL y $J'K'L'$ son semejantes, el lado $K'J' = 7$, el $L'K' = 3$ y el $L'J' = 4$, el $LJ = 8$ ¿cuál es la magnitud de los lados LK y KJ?

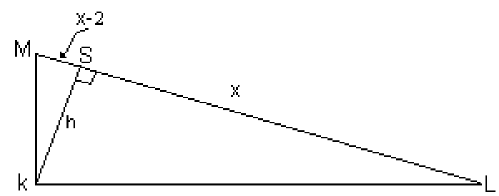
2) En el triángulo rectángulo ABC de la figura, se traza una paralela al lado BC a 5 unidades del vértice B sobre el cateto AB, se pide obtener la magnitud del lado DE y AE.



3) En una margen de río, se localiza un árbol (A), en la otra margen un topógrafo localiza con sus aparatos los puntos A, B, C, D y E, con este trabajo, se quiere conocer el ancho del río (a).



4) En un triángulo rectángulo KLM se traza la altura "h" del lado ML cuya longitud es de $9\,[m]$, se pide calcular la longitud de los segmentos MS y SL si el segmento MS es $2\,[m]$ menor que el segmento SL.

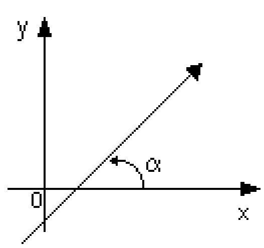


6) Obtener la magnitud de $\sqrt{10}$

4.9. PENDIENTE DE UNA RECTA. CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

PENDIENTE DE UNA RECTA

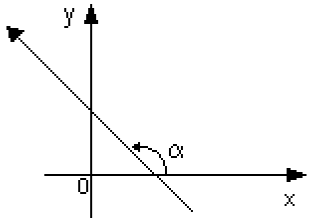
En un sistema de coordenadas cartesiano rectangular tracemos una línea recta dirigida L, el ángulo α que se mide en el sentido positivo + desde el eje x hasta la recta L se llama *"ángulo de inclinación de la recta"* y su variación es de cero grados a ciento ochenta grados, es decir: $0^0 \le \alpha \le 180^0$.



La tangente del ángulo de inclinación α de una recta con el eje x se llama PENDIENTE de la recta y es una característica fundamental de la dirección de la recta.

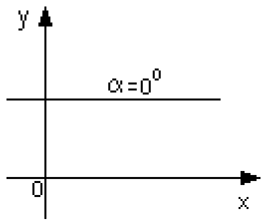
Denotaremos con la letra "m" minúscula la pendiente de cualquier recta.

$$\boxed{m = \tan\alpha}$$



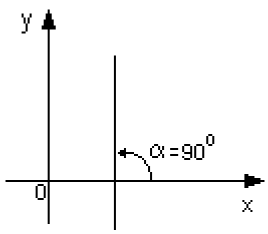
Si $\alpha = 0^0 \quad \Rightarrow \quad \tan 0^0 = 0$; $m = 0$

Si $\alpha = 90^0 \quad \Rightarrow \quad \tan 90^0$ no está definida y por lo tanto la pendiente "m" no existe.



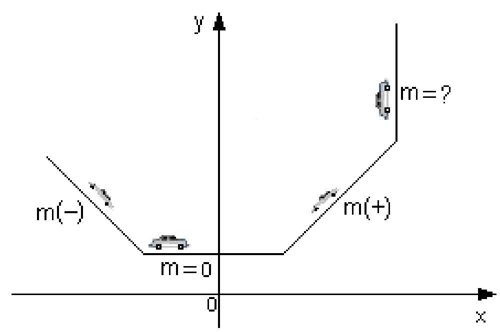
Si α es un ángulo agudo o sea mayor que 0^0 y menor que 90^0 ($0^0 < \alpha < 90^0$), la pendiente es positiva, $m > 0$.

Si α es un ángulo obtuso, mayor que 90^0 y menor que 180^0 ($90^0 < \alpha < 180^0$), la pendiente es negativa, $m < 0$.

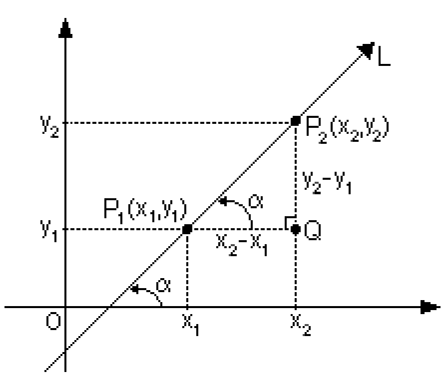


El valor de la pendiente de cualquier recta en el plano puede ser cualquier número real ($m \in \mathbb{R}$).

<u>Una regla</u> muy simple para recordar este concepto del signo de la pendiente de una recta es la siguiente: Imaginemos coches circulando en una carretera de izquierda a derecha, si bajan los coches la pendiente es negativa, si van en planito la pendiente es nula, si suben, la pendiente es positiva y si pudieran ir como moscas sobre un camino vertical, la pendiente no existe.



La PENDIENTE de una recta arbitraria L (que no sea perpendicular al eje x) conocidas las coordenadas de 2 de sus puntos diferentes $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ como se muestra en la construcción de la siguiente figura:



En el triángulo rectángulo P_1QP_2 se tiene:

Si $m = \tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $x_1 \neq x_2$ ••• (A)

el orden en que se tomen las coordenadas de los puntos puede ser también:

$$m = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \; ; \; x_1 \neq x_2 \quad \bullet\bullet\bullet \text{(A')}$$

y el resultado de la pendiente es el mismo.

Gráficamente la pendiente indica que para ir del punto P_1 al punto P_2 es la razón del avance vertical ($y_2 - y_1$) entre lo que se avanza horizontalmente ($x_2 - x_1$).

CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

En Geometría Analítica plana es muy importante saber cuando 2 rectas son paralelas o perpendiculares entre sí.

Supongamos que conocemos las pendientes m_1 y m_2 de las rectas L_1 y L_2, si α_1 y α_2 son sus ángulos de inclinación respectivamente, las rectas L_1 y L_2 son PARALELAS si y solo si $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$ y como $\tan\alpha_1 = m_1$ y $\tan\alpha_2 = m_2$, se concluye que la recta L_1 es paralela a la recta L_2 si y solo si sus pendientes m_1 y m_2 son iguales, o sea:

$$L_1 \parallel L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$$

Dos rectas L_1 y L_2 son PERPENDICULARES entre si cuando $m_1 m_2 = -1$ o lo que es lo mismo, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, lo cual se acostumbra diciendo que "sus pendientes sean recíprocas y de signo contrario", o sea:

$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Estas condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre 2 rectas nos ayudan a determinar por simple inspección visual si existe paralelismo o perpendicularidad cuando conocemos las pendientes respectivas.

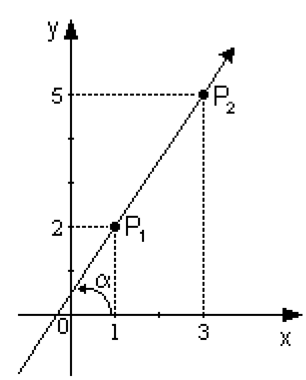
EJEMPLOS

En cada inciso determine la pendiente "m" y el ángulo de inclinación "α" de la recta que pasa por los puntos dados y dibuje su gráfica:

1) $P_1(1,2)$, $P_2(3,5)$

Solución

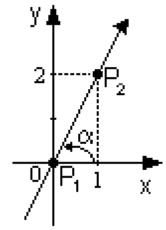
Si $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$, el mismo valor se obtiene si la calculamos con $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2-5}{1-3} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ cuidando el orden.



Como $\tan\alpha = m$; $\tan\alpha = \frac{3}{2}$; $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31^0$

2) $P_1(0,0)$, $P_2(1,2)$

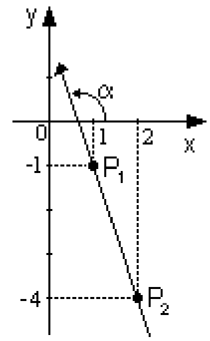
Solución



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2 \ ; \ \alpha = \tan^{-1}(2) = 63.43^0$$

3) $P_1(1,-1)$, $P_2(2,-4)$

Solución



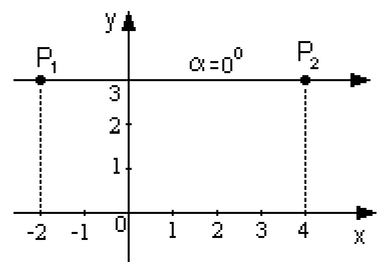
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-1-(-4)}{1-2} = \frac{-1+4}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

como la pendiente es negativa $m = -3$, entonces α es ángulo obtuso y $90^0 < \alpha < 180^0$ por lo que:

$\alpha = 180^0 - \tan^{-1}(3) = 180^0 - 71.57^0 = 108.43^0$

4) $P_1(-2,3)$, $P_2(4,3)$

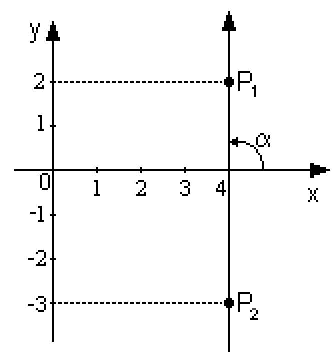
Solución



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-3}{4-(-2)} = \frac{0}{6} = 0 \ ; \ \alpha = \tan^{-1}(0) = 0^0$$

5) $P_1(4,2)$, $P_2(4,-3)$

Solución

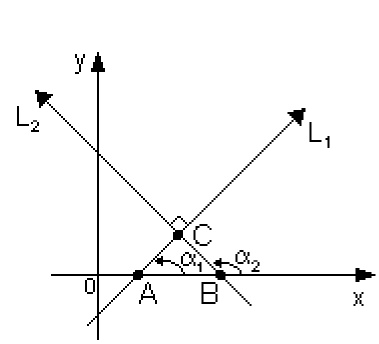


$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2-(-3)}{4-4} = \frac{2+3}{0} = \frac{5}{0}$$; no existe

$\alpha = 90^0$

6) Demostrar que 2 rectas perpendiculares entre sí cumplen la condición “que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario”.

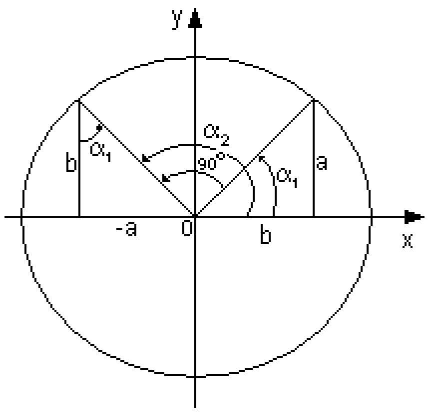
Solución



Supongamos que en la siguiente figura, efectivamente las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares mutuamente. α_1 y α_2 son los ángulos de inclinación de L_1 y L_2 respectivamente.

La geometría nos indica que el ángulo exterior α_2 en el vértice B del triángulo ABC es igual a la suma de los ángulos opuestos interiores α_1 y 90^0 o sea: $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$

y consecuentemente la $\tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + 90^0)$ y como $\tan(\alpha_1 + 90^0) = -\cot\alpha_1 = \dfrac{-1}{\tan\alpha_1}$ y si $\tan\alpha_2 = m_2$ y $\tan\alpha_1 = m_1$, entonces $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$



Nota: En esta figura, se muestra porqué la $\tan(\alpha_1 + 90^0) = -\cot\alpha_1$, de la figura vemos que $\tan\alpha_2 = \tan(\alpha_1 + 90^0) = \dfrac{b}{-a}$ y si $\cot\alpha_1 = \dfrac{b}{a}$ entonces $-\cot\alpha_1 = -\dfrac{b}{a}$, por lo tanto $\tan\alpha_2 = -\cot\alpha_1 = -\dfrac{1}{\tan\alpha_1}$

7) Los vértices de un triángulo son $A(4,0)$, $B(0,1)$ y $C(2,9)$, demuestre que pertenecen a un triángulo rectángulo.

Solución

Calculando la pendiente de cada lado:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0}{0-4} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} \; ; \; m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{9-1}{2-0} = \frac{8}{2} = 4$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{9-0}{2-4} = \frac{9}{-2} = -\frac{9}{2}$$

Como las pendientes de los lados AB y BC son recíprocas y de signo contrario, si es un triángulo rectángulo.

8) Verificar que los puntos $P_1(-2,-3)$, $P_2(2,2)$ y $P_3(6,7)$ son colineales.

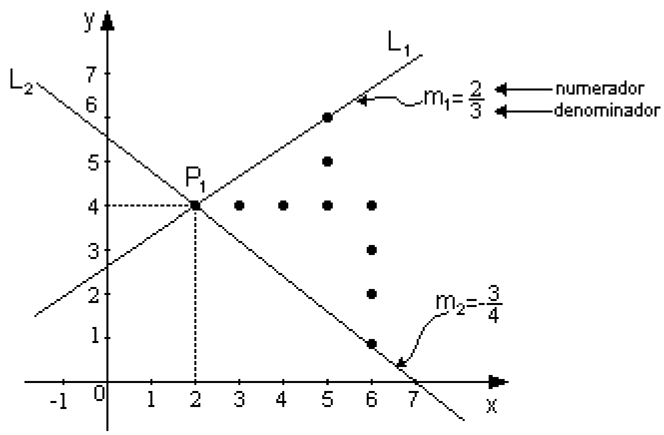
Solución

Si la pendiente de P_1 a P_2 es igual que la pendiente de P_1 a P_3, entonces si son colineales (o sea que están sobre la misma recta): $m_{12} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2+3}{2+2} = \dfrac{5}{4}$; $m_{13} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{7+3}{6+2} = \dfrac{5}{4}$

luego entonces, si son colineales.

9) Dibujar las rectas que pasan por el mismo punto $P_1(2,4)$ y cuyas pendientes son $m_1 = \frac{2}{3}$ y $m_2 = -\frac{3}{4}$.

Solución



La forma que se recomienda es la siguiente: el denominador será siempre el número positivo y se avanzará hacia la derecha a partir del punto P_1 y el numerador si es positivo irá hacia arriba y si es negativo hacia abajo después del avance horizontal del denominador como se muestra en la figura de la izquierda.

10) Muestre que los segmentos que unen los puntos medios del cuadrilátero cuyos vértices son $A(-2,-4)$, $B(5,-1)$, $C(3,3)$, y $D(-3,5)$ forman un paralelogramo.

Solución

Primero calculamos los puntos medios de cada lado:

$$AB:\ M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-2+5}{2},\frac{-4-1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{-5}{2}\right)$$

$$BC:\ M_{BC}\left(\frac{x_C+x_B}{2},\frac{y_C+y_B}{2}\right)=\left(\frac{3+5}{2},\frac{3-1}{2}\right)=(4,1)$$

$$CD:\ M_{CD}\left(\frac{x_D+x_C}{2},\frac{y_D+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-3+3}{2},\frac{5+3}{2}\right)=(0,4)$$

$$AD:\ M_{AD}\left(\frac{x_D+x_A}{2},\frac{y_D+y_A}{2}\right)=\left(\frac{-3-2}{2},\frac{5-4}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Ahora calculamos las pendientes de los segmentos que unen los puntos medios de cada lado:

$$M_{AB}M_{BC}:\ m=\frac{\frac{-5}{2}-1}{\frac{3}{2}-4}=\frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{7}{5} \quad ; \quad M_{BC}M_{CD}:\ m=\frac{1-4}{4-0}=-\frac{3}{4}$$

$$M_{CD}M_{AD}:\ m=\frac{4-\frac{1}{2}}{0+\frac{5}{2}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{7}{5} \quad ; \quad M_{AD}M_{AB}:\ m=\frac{\frac{-5}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=\frac{-\frac{6}{2}}{\frac{8}{2}}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

Como el lado $M_{AB}M_{BC}$ es paralelo al lado $M_{CD}M_{AD}$ (pendientes iguales) y el lado $M_{BC}M_{CD}$ es paralelo al $M_{AD}M_{AB}$, entonces si es un paralelogramo.

EJERCICIOS

1) Los puntos $A(0,-4)$, $B(-3,-2)$, $C(0,5)$, $D(5,3)$ y $E(4,-3)$ son los vértices de un polígono, obtener la pendiente de cada lado y su ángulo de inclinación.

2) Demuestre que si dos rectas L_1 y L_2 son paralelas entonces $m_1=m_2$.

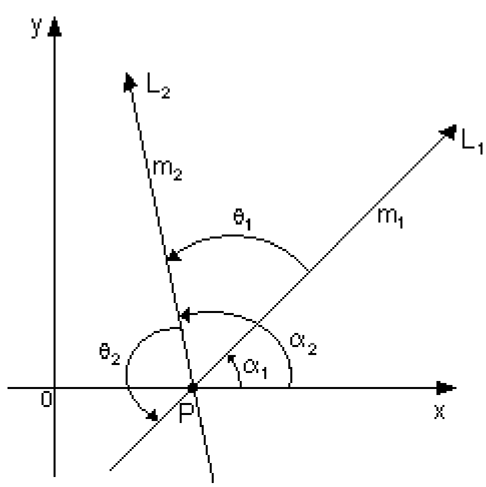
3) Los puntos $A(4,1)$, $B(1,2)$ y $C(-2,3)$ están alineados, demostrarlo.

4) En cada inciso, dibujar la recta que pasa por el punto P_1 con pendiente dada:
a) $P_1(3,4), m=0$; b) $P_1(-4,2), m=-1$; c) $P_1(5,0), m=2$; d) $P_1(-1,-1), m=$no definida;
e) $P_1(0,0), m=-\frac{2}{5}$.

5) Los puntos $P_1(-1,-3)$, $P_2(4,-3)$, $P_3(4,2)$ y $P_4(-1,2)$ son la vértices de un cuadrado muestre que sus diagonales son perpendiculares entre sí.

4.10. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Consideremos dos rectas L_1 y L_2 que se intersectan en un punto P cualquiera del plano coordenado, sus ángulos de inclinación y sus pendientes son respectivamente α_1, m_1 y α_2, m_2 como se muestra en la siguiente figura:



El problema consiste en determinar la medida de θ_1 y θ_2 que como se ve, son ángulos suplementarios o sea que $\theta_1+\theta_2=180^0$, al conocer alguno de los dos se conoce el otro de inmediato. Todos los ángulos están trazados en el sentido positivo +, de la figura observamos que $\theta_1=\alpha_2-\alpha_1$ y calculando la tangente en ambos miembros se tiene:

$$\tan\theta_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) \quad ; \quad \tan\theta_1 = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1} \quad ; \text{ si } \tan\alpha_2 = m_2 \text{ y } \tan\alpha_1 = m_1$$

entonces $\tan\theta_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$; con $m_2 m_1 \neq -1$

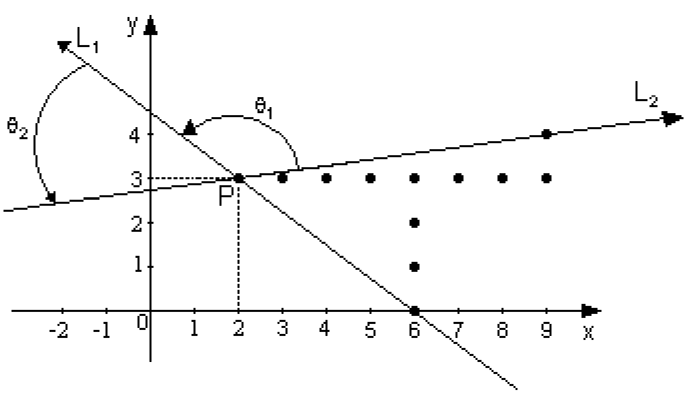
Una forma sencilla para recordar esta fórmula es la siguiente: con ayuda de la figura y el trazo de los ángulos θ_1 y θ_2, decimos que la tangente del ángulo θ_1 es igual a la pendiente de la recta donde termina la flecha (m_2), menos la pendiente de la recta donde inicia la flecha (m_1), esta diferencia dividida entre uno más el producto de las dos pendientes ($1 + m_2 m_1$).

De esta forma, para calcular el ángulo suplementario θ_2 es: $\tan\theta_2 = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$; con $m_1 m_2 \neq -1$

EJEMPLOS

1) Dos rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son $m_1 = -\dfrac{3}{4}$, $m_2 = \dfrac{1}{7}$ respectivamente, se cruzan en el punto $P(2,3)$, obtener el ángulo que forman y hacer un dibujo del problema.

<u>Solución</u>



Como en realidad no se especifica claramente cuál ángulo es el que se pide calcular, lo más recomendable es conocer los dos ángulos suplementarios θ_1 y θ_2 como sigue:

$$\tan\theta_1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{7}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{-21-4}{28}}{1 - \frac{3}{28}}$$

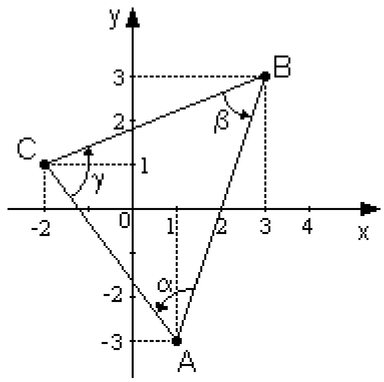
$$\tan\theta_1 = \frac{-\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = -1$$

$\theta_1 = \tan^{-1}(-1) = 180^0 - \tan^{-1}(1) = 180^0 - 45^0 = 135^0$

$\theta_1 = 135^0$ y $\theta_2 = 45^0$ ya que $\theta_1 + \theta_2 = 135^0 + 45^0 = 180^0$

2) Los vértices de un triángulo son $A(1,-3)$, $B(3,3)$ y $C(-2,1)$ se pide obtener los ángulos interiores y hacer un dibujo del problema.

Solución



Las pendientes de los lados del triángulo son:

$$m_{AB}=\frac{3+3}{3-1}=\frac{6}{2}=3$$

$$m_{BC}=\frac{3-1}{3+2}=\frac{2}{5}$$

$$m_{AC}=\frac{1+3}{-2-1}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{m_{AC}-m_{AB}}{1+m_{AC}m_{AB}}=\frac{-\frac{4}{3}-3}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)(3)}=\frac{\frac{-4-9}{3}}{1-4}=\frac{13}{9}\quad;\quad \tan\alpha=\frac{13}{9}\ ;\ \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{13}{9}\right)=55.31^0$$

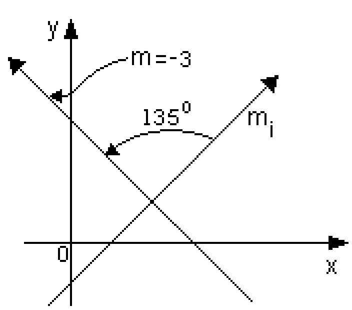
$$\tan\beta=\frac{m_{AB}-m_{BC}}{1+m_{AB}m_{BC}}=\frac{3-\frac{2}{5}}{1+(3)\left(\frac{2}{5}\right)}=\frac{\frac{15-2}{5}}{\frac{5+6}{5}}=\frac{13}{11}\quad;\quad \beta=\tan^{-1}\left(\frac{13}{11}\right)=49.76^0$$

$$\tan\gamma=\frac{m_{BC}-m_{AC}}{1+m_{BC}m_{AC}}=\frac{\frac{2}{5}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{\frac{6+20}{15}}{\frac{15-8}{15}}=\frac{26}{7}\quad;\quad \gamma=\tan^{-1}\left(\frac{26}{7}\right)=74.93^0$$

$$\alpha+\beta+\gamma=55.31^0+49.76^0+74.93^0=180^0$$

3) Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135^0, sabiendo que la recta donde termina la flecha que mide a este ángulo es -3, se pide calcular la pendiente de la recta inicial (m_i).

Solución



Un bosquejo de la gráfica del problema puede ser el siguiente:

$$\tan 135^0=\frac{-3-m_i}{1+(-3)(m_i)}$$

$$-1=\frac{-3-m_i}{1-3m_i}\ ;\ (-1)(1-3m_i)=-3-m_i$$

$$-1+3m_i=-3-m_i\ ;\ 3m_i+m_i=-3+1$$

$$4m_i=-2\quad;\quad m_i=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

4) Verificar la fórmula $\tan\theta_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$; con $m_2 m_1 \neq -1$

Solución

Recordando la figura al inicio del tema 4.10, se tiene que $\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ y calculando la tangente a ambos miembros:

$$\tan\theta_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{sen(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

donde $sen(\alpha_2 - \alpha_1) = sen\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 sen\alpha_1$

y $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + sen\alpha_2 sen\alpha_1$

sustituyendo estas en la anterior tenemos: $\dfrac{sen(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = \dfrac{sen\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 sen\alpha_1}{\cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + sen\alpha_2 sen\alpha_1}$

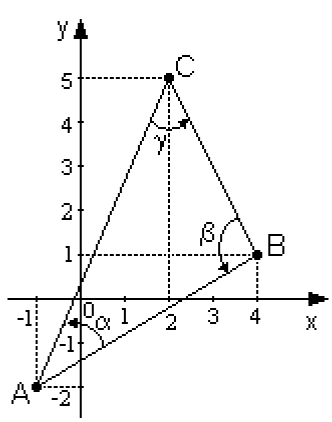
dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha_2 \cos\alpha_1$:

$$\frac{\dfrac{sen\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 sen\alpha_1}{\cos\alpha_2 \cos\alpha_1}}{\dfrac{\cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + sen\alpha_2 sen\alpha_1}{\cos\alpha_2 \cos\alpha_1}} = \frac{\dfrac{sen\alpha_2}{\cos\alpha_2} - \dfrac{sen\alpha_1}{\cos\alpha_1}}{1 + \dfrac{sen\alpha_2}{\cos\alpha_2} \cdot \dfrac{sen\alpha_1}{\cos\alpha_1}} = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}$$

y como $\tan\alpha_2 = m_2$ y $\tan\alpha_1 = m_1$ entonces: $\tan\theta_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$; con $m_2 m_1 \neq -1$

5) ¿Cuánto mide el menor ángulo interno del triángulo cuyos vértices son $A(-1,-2)$, $B(4,1)$ y $C(2,5)$?

Solución



Calculando la pendiente de cada lado del triángulo:

$$m_{AB} = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5} \; ; \; m_{BC} = \frac{1-5}{4-2} = -\frac{4}{2} = -2 \; ; \; m_{AC} = \frac{5+2}{2+1} = \frac{7}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{\dfrac{7}{3} - \dfrac{3}{5}}{1 + \left(\dfrac{7}{3}\right)\left(\dfrac{3}{5}\right)} = \frac{\dfrac{35-19}{15}}{\dfrac{15+21}{15}} = \frac{26}{36} = \frac{13}{8}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{13}{8}\right) = 35.84^0$$

$$\tan\beta = \frac{\frac{3}{5}+2}{1+\left(\frac{3}{5}\right)(-2)} = \frac{\frac{3+10}{5}}{\frac{5-6}{5}} = \frac{13}{-1} = -13 \ ; \ \beta = 180^0 - \tan^{-1}(13) = 180^0 - 85.60^0 = 94.40^0$$

$$\tan\gamma = \frac{-2-\frac{7}{3}}{1+(-2)\left(\frac{7}{3}\right)} = \frac{\frac{-6-7}{3}}{\frac{3-14}{3}} = \frac{-13}{-11} = \frac{13}{11} \ ; \ \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{13}{11}\right) = 49.76^0$$

El menor ángulo interno es $\alpha = 35.84^0$

Nota: Como el valor absoluto de la $\tan\alpha$ es menor que el valor absoluto de las otras dos, esto indica que será el valor del menor ángulo interno, esto es: $\left|\frac{13}{18}\right| < \left|\frac{13}{11}\right| < |-13|$ y solo calculamos α.

EJERCICIOS

1) En el punto $P(4,-2)$ se intersectan las rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son $m_1 = \frac{1}{3}$ y $m_2 = 4$ respectivamente, obtenga el ángulo que forman y dibuje su gráfica.

2) Dos rectas se cruzan formando un ángulo de 35^0, se sabe que la recta donde inicia la flecha que mide este ángulo es de pendiente $\frac{3}{2}$, obtenga la pendiente de la recta donde termina la flecha.

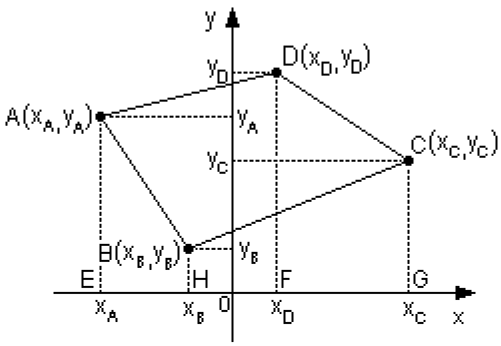
3) Verificar a partir de la fórmula $\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1+m_2m_1}$; con $m_2m_1 \neq -1$, que las dos rectas L_1 y L_2 son paralelas.

4) ¿Cuánto mide el menor ángulo interno del triángulo cuyos vértices son $A(-4,-2)$, $B(5,-1)$ y $C(-2,2)$?

5) La recta L_1 pasa por los puntos $A(-2,-2)$ y $B(5,2)$ y la recta L_2 pasa por los puntos $C(4,3)$ y $D(3,y)$, las dos rectas se cruzan en algún punto formando un ángulo de 40^0, se pide obtener la ordenada "y" del punto D.

4.11. CÁLCULO DEL ÁREA DE UN POLÍGONO

El cálculo del área de cualquier polígono cerrado, como por ejemplo el que se muestra en la figura, se puede obtener componiendo de varios trapecios como sigue:



Área del polígono $ABCD =$ Área del trapecio $AEFD +$ Área del trapecio $DFGC -$ Área del trapecio $AEHB -$ Área del trapecio $BHGC$:

Recordemos que el área de un trapecio es igual a la semisuma de sus lados paralelos multiplicada por la altura.

Área del polígono:

$$ABCD = \frac{1}{2}\left[(y_D + y_A)(x_D - x_A) + (y_D + y_C)(x_C - x_D) - (y_A + y_B)(x_B - x_A) - (y_C + y_B)(x_C - x_B)\right] \quad ...(A)$$

Arreglando algebraicamente esta expresión (A), se puede presentar de las siguientes 2 formas que simplifican su aprendizaje:

1ª Forma.

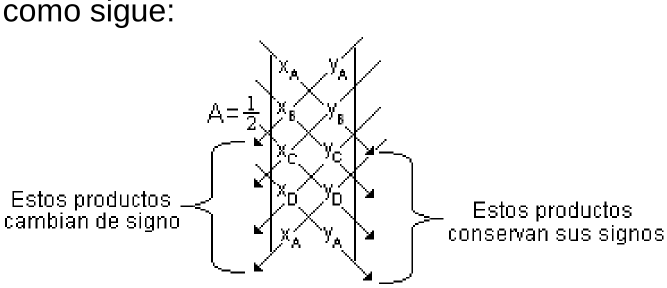
Eligiendo arbitrariamente cualquier vértice del polígono $ABCD$, digamos el vértice A, se dice que el área del polígono es igual a la abscisa del vértice $A\,(x_A)$ multiplicada por la diferencia de ordenadas del vértice que le sigue menos el que le antecede $(y_B - y_D)$ y se pasa al siguiente vértice en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (B) para que el área del polígono sea con valor positivo, en seguida se repite la regla, o sea que se suma el siguiente producto de la abscisa de $B(x_B)$ por la diferencia de ordenadas del vértice que le sigue menos el que le antecede o sea $x_B(y_C - y_A)$ y así se continua la regla hasta llegar al último vértice D y todo se multiplica por $\frac{1}{2}$, quedando la forma como sigue:

$$A = \frac{1}{2}\left[x_A(y_B - y_D) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_D - y_B) + x_D(y_A - y_C)\right]$$

Aparentemente la explicación es larga pero es muy fácil aprenderla.

2ª Forma.

El desarrollo algebraico de la expresión (A) se puede expresar como un arreglo en forma de determinante con las coordenadas de los vértices del polígono leyéndolas en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, partiendo también de un vértice arbitrario, por ejemplo del vértice A o del que sea, hasta repetir el vértice inicial como sigue:



Para resolver este arreglo, deberán efectuarse los productos como indican las flechas.

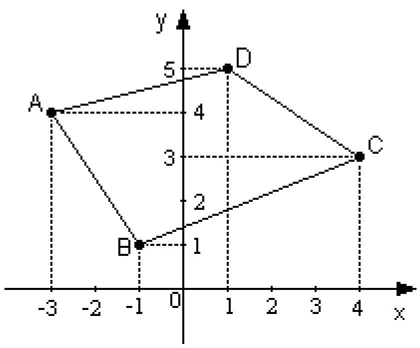
Nota: No olvidar que el orden correcto de la lectura de los vértices es muy importante.

EJEMPLOS

1) Los vértices de un polígono son $A(-3,4)$, $B(-1,1)$, $C(4,3)$ y $D(1,5)$, se pide calcular su área por las 2 formas.

Solución

1ª Forma. Iniciemos con el vértice "B" y en el orden se tiene:



$$A=\frac{1}{2}\left[x_B\left(y_C-y_A\right)+x_C\left(y_D-y_B\right)+x_D\left(y_A-y_C\right)+x_A\left(y_B-y_D\right)\right]$$

$$A=\frac{1}{2}\left[(-1)(3-4)+(4)(5-1)+(1)(4-3)+(-3)(1-5)\right]$$

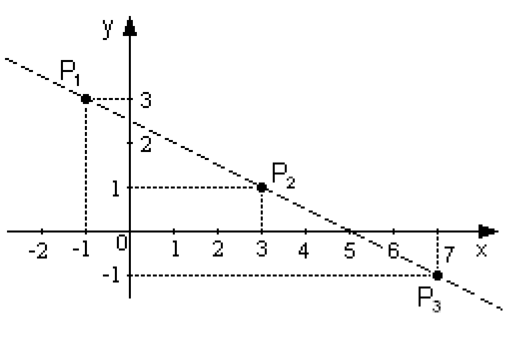
$$A=\frac{1}{2}\left[1+16+1+12\right]=\frac{1}{2}(30)=15\left[u^2\right]$$ (unidades cuadradas)

2ª Forma. Iniciemos con el vértice "D" :

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_D & y_D \\ x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_D & y_D \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \\ -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(4-3-3+20+15+4-4-3)=\frac{1}{2}(30)=15\left[u^2\right]$$

2) Muestre que los puntos $P_1(-1,3)$, $P_2(3,1)$, $P_3(7,-1)$ están alineados.

Solución

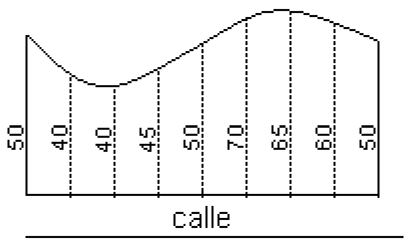


Si el área es igual a cero, los tres puntos están alineados, pues una línea recta no tiene área.

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(-1-3+21-9-7-1)$$

$A=\frac{1}{2}(0)=0\left[u^2\right]$ Si estan alineados P_1, P_2 y P_3.

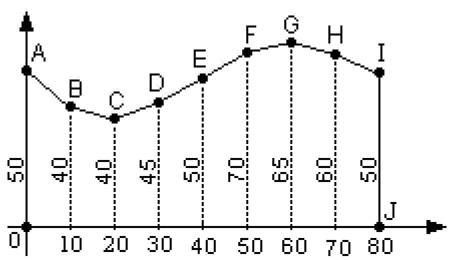
3) Si tiene un terreno de forma irregular como se muestra en la figura, se quiere saber cuál es su área aproximada si se cuenta con las medidas indicadas en metros.



El ancho de los intervalos es de $10[m]$

Solución

Colocamos la figura sobre un sistema coordenado rectangular y unimos con rectas cada extremo medido y así formamos un polígono como sigue:



$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} 0 & 50 \\ 0 & 0 \\ 80 & 0 \\ 80 & 50 \\ 70 & 60 \\ 60 & 65 \\ 50 & 70 \\ 40 & 50 \\ 30 & 45 \\ 20 & 40 \\ 10 & 40 \\ 0 & 50 \end{array}\right| = \frac{1}{2}(0+0+4000+4800+4550+4200+2500+$$

$$1800+1200+800+500-0-0-0-$$

$$-3500-3600-3250-2800-1500-$$

$$-900-400-0)=\frac{1}{2}(8400)$$

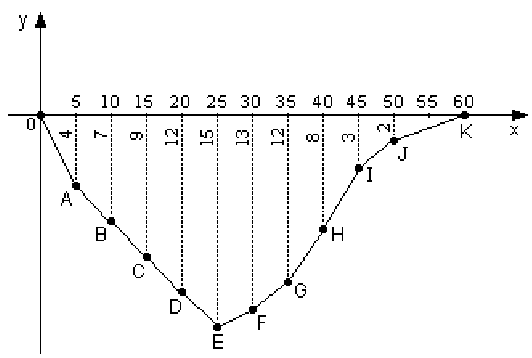
$$A=4200\left[m^2\right] aprox.$$

4) La sección transversal de un río de $60[m]$ de ancho se muestra en la siguiente tabla, la profundidad “ y ” es medida a una distancia “ x ” de la orilla, calcular su área aproximada.

$x[m]$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60
$y[m]$	0	4	7	9	12	15	13	12	8	3	2	0

Solución

Los datos de la tabla los llevamos a un sistema coordenado rectangular para formar un polígono como sigue:



$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \\ 10 & -8 \\ 15 & -9 \\ 20 & -12 \\ 25 & -15 \\ 30 & -13 \\ 35 & -12 \\ 40 & -8 \\ 45 & -3 \\ 50 & -2 \\ 60 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\,(0-40-90-180-300-325- -360-280-120-90+0+0+ +0+40+120+180+300+ +450+455+480+360+150+ +120+0)=\frac{870}{2}=435\left[m^2\right]$$

5) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A(-3,4)$, $B(2,-3)$ y $C(4,1)$, hacer esto en las 2 formas.

<u>Solución</u>

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(16+9+2+3-8+12)=\frac{1}{2}(34)=17\left[u^2\right]$$

$$A=\frac{1}{2}\left[x_C\left(y_A-y_B\right)+x_A\left(y_B-y_C\right)+x_B\left(y_C-y_A\right)\right]=\frac{1}{2}\left[4(4+3)-3(-3-1)+2(1-4)\right]$$

$$A=\frac{1}{2}\left[28+12-6\right]=\frac{1}{2}(34)=17\left[u^2\right]$$

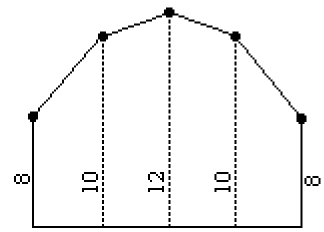
EJERCICIOS

1) Calcular el área del triángulo $P_1(0,7)$, $P_2(0,2)$ y $P_3(4,4)$.

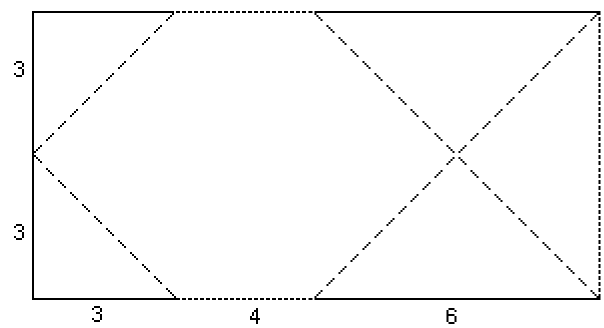
2) Calcular el área del polígono $A(-1,2)$, $B(0,6)$, $C(4,3)$, $D(6,5)$, $E(8,2)$ y $F(3,-1)$.

3) Verifique que los puntos $P_1(-2,-1)$, $P_2(0,0)$, $P_3(2,1)$ y $P_4(4,2)$ son colineales.

4) La siguiente figura muestra la sección transversal de un túnel que se va a construir para el METRO, calcular su área si el ancho de los intervalos es de 3 metros cada uno.

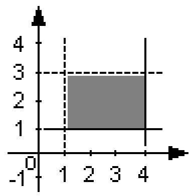


5) Calcular el área del contorno punteado de la siguiente figura:



AUTOEVALUACIÓN DE LOS CUATRO PRIMEROS CAPÍTULOS

1) La figura muestra el producto cartesiano BxA, ¿quién es A y B?



a) $A=(1,4)$ $B=(1,3)$ b) $A=[1,4)$ $B=(1,3]$ c) $A=(1,4]$ $B=[1,3)$ d) $A=[1,4]$ $B=[1,3]$

2) La representación algebraica del siguiente enunciado: "un número real "y" es igual al cuadrado de la diferencia de otro número "x" y 2", es:

a) $y=(2-x)^2$ b) $y=x^2-2$ c) $y=2-x^2$ d) $y=(x-2)^2$

3) La relación explícita de $\frac{3x+2xy+y}{2x-1}=3$, es:

a) $y=\frac{3(x-1)}{2x+1}$ b) $y=\frac{3(x+1)}{2x+1}$ c) $y=\frac{3(x-1)}{2x-1}$ d) $y=\frac{3(x+1)}{2x-1}$

4) De las cuatro opciones que se dan, tache la que representa una función.

a) $xy^2-x^2=3x+2$ b) $xy^2+x=3x-2$ c) $xy-x^2=3x+2$ d) $xy-y^2=3x-2$

5) ¿Cuál es el dominio de la función $y=\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x-2}}$?

a) $[2,\infty)$ b) $(2,\infty)$ c) $(-\infty,2]$ d) $(-\infty,2)$

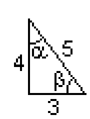
6) ¿Cuál es el rango de la función $y=\frac{2}{x}$?

a) $(0,\infty)$ b) $\mathbb{R}$ c) $[0,\infty)$ d) $\mathbb{R}-\{0\}$

7) La inversa de la función $y=3x+2$ es:

a) $y=\frac{1}{3}(x+2)$ b) $y=\frac{1}{3}(x-2)$ c) $y=-\frac{1}{3}(x-2)$ d) $y=-\frac{1}{3}(x+2)$

8) La solución del triángulo rectángulo es:



a) $\alpha=35^0$ $\beta=55^0$ b) $\alpha=45.3^0$ $\beta=44.7^0$ c) $\alpha=50^0$ $\beta=40^0$ d) $\alpha=53.13^0$ $\beta=36.87^0$

9) ¿Cuántos radianes son 135^0?

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{5}$

10) ¿Cuál de las siguientes 4 opciones es verdadera?

a) $sen^2 t + \cos^2 t = 1$ b) $sen\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$ c) $sen^2 t - \cos^2 t = 1$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = sent$

11) El ángulo α es generado en el sentido positivo por el segmento de recta $\overline{OP}$ cuyas coordenadas son $O(0,0)$, $P(-5,5)$, el valor de "$sen\alpha$" es:

a) $\frac{\sqrt{2}}{1}$ b) $\frac{-\sqrt{2}}{1}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

12) La ley de los cosenos indica que:

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ b) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$ c) $a^2 = b^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha$

d) $a^2 = b^2 - c^2 - 2bc\cos\alpha$

13) La solución del triángulo cuyos datos son $a = 30.5$, $\alpha = 35^0$, $\beta = 70^0$, es:

a) $b = 50$, $c = 51.4$, $\gamma = 75^0$ b) $b = 50$, $c = 51$, $\gamma = 65^0$ c) $b = 50$, $c = 54$, $\gamma = 70^0$

d) $b = 50$, $c = 54$, $\gamma = 65^0$

14) La función $y = e^{2x} + 3$ es:

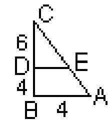
a) Algebraica b) Irracional c) Exponencial d) Racional

15) Dada la función $y = 2\log x$, su equivalente función exponencial es:

a) $y = 10^{\frac{y}{2}}$ b) $x = 10^{\frac{-y}{2}}$ c) $y = 10^{\frac{-x}{2}}$ d) $x = 10^{\frac{y}{2}}$

16) La distancia entre los puntos $A(-2,6)$, $B(2,3)$ es:

a) $AB = 3$ b) $AB = 4$ c) $AB = 5$ d) $AB = 6$

17) En la siguiente figura, ¿cuál es la magnitud de DE? 

a) $DE = 2.40$ b) $DE = 2.80$ c) $DE = 2.16$ d) $DE = 2.32$

18) Dos líneas rectas L_1 y L_2 son paralelas si sus pendientes:

a) $m_1 - m_2 = 0$ b) $m_1 = \frac{1}{m_2}$ c) $m_1 = -m_2$ d) $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

19) $A(-2,-5)$ y $B(4,3)$ son los extremos de un segmento de recta, las coordenadas de su punto medio son:

a) $M_{AB}(1,1)$ b) $M_{AB}(-1,1)$ c) $M_{AB}(1,-1)$ d) $M_{AB}(-1,-1)$

20) $A\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$, $B(4,1)$, $C(0,4)$ y $D\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ son los vértices de un polígono, su área es:

a) $A = 21\,u^2$ b) $A = 21.5\,u^2$ c) $A = 22\,u^2$ d) $A = 22.5\,u^2$

HOJA DE RESPUESTAS DE LA AUTOEVALUACIÓN DE LOS CUATRO PRIMEROS CAPÍTULOS

Las indicaciones previas son las mismas que en el autodiagnóstico.

1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d
16	a	b	c	d
17	a	b	c	d
18	a	b	c	d
19	a	b	c	d
20	a	b	c	d

Para obtener tu calificación, usa la siguiente fórmula:

$$Calificaci\acute{o}n = \left[N° \text{ de respuestas correctas} - \frac{N° \text{ de incorrectas}}{3} \right](5)$$

V. DISCUSIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Objetivos: Que el alumno:

1. Dada una expresión matemática en dos variables, sea capaz de analizarla para poder graficarla.

5.1. DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN

Discutir una ecuación algebraica representada por una expresión en dos variables de la forma $f(x,y)=0$, significa analizar algunos pasos que nos permitan conocer aspectos importantes de la ecuación y con esto poder trazar su gráfica con alguna precisión de una manera relativamente sencilla. Los pasos por analizar los pondremos en forma de listado como sigue:

1. Extensión.
2. Intersecciones: Con el eje "x" y con el eje "y".
3. Simetrías: Con el eje "x", con el eje "y", con el origen de coordenadas.
4. Asíntotas: Horizontales y verticales.
5. Tabulación.
6. Gráfica.

Expliquemos cada uno de estos pasos en el orden:

1. Extensión: La extensión de una curva $f(x,y)=0$, trata la determinación de los intervalos de variación para los cuales los valores de "x" y "y" son valores reales, esto nos ayuda para la localización de la curva en el plano coordenado y además poder saber si se trata de una curva cerrada o de extensión indefinida. Los intervalos de variación se determinan de la misma forma que en la sección 1.4 del capítulo I, despejando "y" en términos de "x" y luego despejando "x" en términos de "y", determinando así el Dominio y el Rango de la ecuación $f(x,y)=0$.

2. Intersecciones: Con el eje "x" y con el eje "y".

   Recordando que todo punto que se localice sobre el eje "x" tiene coordenadas $(x,0)$ donde $x \in \mathbb{R}$ y todo punto sobre el eje "y" tiene coordenadas $(0,y)$ donde $y \in \mathbb{R}$, recordar esto nos permite obtener las intersecciones de la gráfica de la ecuación con los ejes coordenados procediendo como sigue:

   a) Con el eje "x". En la ecuación dada, sustitúyase CERO en la variable "y" y resuélvase para x.

b) Con el eje "y". En la ecuación dada, sustitúyase CERO en la variable "x" y resuélvase para y.

- Es conveniente aclarar que algunas ecuaciones pueden tener uno, varios o ningún punto de intersección con los ejes.

3. <u>Simetrías</u>: a) Con el eje "x", b) Con el eje "y", c) Con el origen de coordenadas.

- Una curva es simétrica respecto a una línea recta si cada punto de la curva tiene su <u>simétrico</u> con respecto a la recta.

a) Con el eje "x": Si en la ecuación dada (la original) se sustituye la "y" por "$-y$" y esta no cambia respecto a la original, entonces la curva dada es simétrica respecto al eje "x", si cambia, entonces no hay simetría con el eje "x" (ya que los puntos de coordenadas (x,y) y $(x,-y)$ con $x,y\in\mathbb{R}$ son simétricos respecto al eje "x").

b) Con el eje "y": Si en la ecuación dada (la original) se sustituye la "x" por "$-x$" y esta no cambia respecto a la original, entonces la curva dada es simétrica respecto al eje "y", si cambia, entonces no hay simetría con el eje "y" (ya que los puntos de coordenadas (x,y) y $(-x,y)$ con $x,y\in\mathbb{R}$ son simétricos respecto al eje "y").

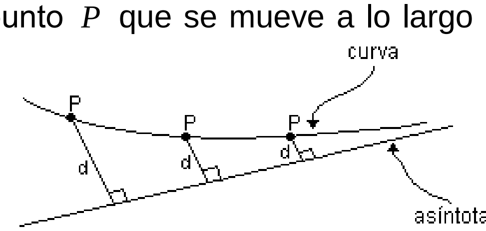
- Una curva es simétrica con respecto a un punto P si cada punto de la curva tiene su simétrico con respecto al punto P.

c) Con el origen de coordenadas: Si en la ecuación dada (la original) se sustituye la "x" por "$-x$" y la "y" por "$-y$" y esta no cambia respecto a la original, entonces la curva dada es simétrica respecto al origen de coordenadas, si cambia, entonces no hay simetría respecto al origen (ya que los puntos de coordenadas (x,y) y $(-x,-y)$ con $x,y\in\mathbb{R}$ son simétricos con respecto al origen de coordenadas).

- Cuando hay simetría respecto a los dos ejes, también habrá simetría respecto al origen. Cuando hay simetría con respecto a uno solo de los ejes, no habrá simetría respecto al origen. Si no hay simetría con respecto a ninguno de los ejes, es posible que si haya simetría respecto al origen y hay que investigarlo.

4. <u>Asíntotas</u>: a) Horizontales, b) Verticales.

- Si la distancia "d" entre un punto P que se mueve a lo largo de una curva respecto a una línea recta, se hace cada vez más pequeña sin que llegue a tocar la recta, dicha recta es asíntota de la curva.



- Trataremos algunas reglas para determinar asíntotas cuando se tienen ecuaciones algebraicas de la forma $y=\frac{f(x)}{g(x)}$; $y=\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios en "x" distintos de cero, tienen asíntotas <u>horizontales</u> y <u>verticales</u>.

1ª Regla: Si los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ son de <u>igual grado</u>, al efectuar la división $f(x)\div g(x)$, el cociente "k" es la asíntota horizontal $(y=k)$, e igualando a cero el polinomio del denominador $g(x)=0$ y resolviendo para x, se obtendrán las asíntotas verticales:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=k+\frac{r(x)}{g(x)}$$

2ª Regla: Si el polinomio del numerador $f(x)$ es de <u>menor grado</u> que el del polinomio del denominador $g(x)$, la asíntota horizontal es el eje "x" cuya ecuación es $y=0$, e igualando a cero el polinomio del denominador $g(x)=0$ y resolviendo para x, se obtendrán las asíntotas verticales.

3ª Regla: Si el polinomio del numerador $f(x)$ es de <u>grado mayor</u> que el del polinomio del denominador $g(x)$, entonces no existe asíntota horizontal o serán de otra forma, en este momento serían necesarios conceptos que se verán más adelante. En lo que respecta a las asíntotas verticales si las hay, su tratamiento es similar a las reglas anteriores.

5. Tabulación: Este concepto ya se trató en el capítulo I y también se aconseja reestudiarlo.

6. Gráfica: Con toda la información obtenida en los 5 puntos anteriores, se procede a graficar la ecuación original como veremos en los siguientes:

EJEMPLOS

Discutir la ecuación dada en cada inciso.

1) $x^2y-3xy-x^2+2y-3x-2=0$

<u>Solución</u>

Debemos analizar paso por paso como sigue:

1. <u>Extensión.</u>

Despejando "y" en términos de "x" se tiene:

$$y\left(x^2-3x+2\right)=x^2+3x+2 \quad ; \quad y=\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$$

Igualando a cero el denominador: $x^2 - 3x + 2 = 0$

factorizando $(x-2)(x-1) = 0$

igualando a cero cada factor $x - 2 = 0$; $x = 2$

$x - 1 = 0$; $x = 1$

Dominio$= \mathbb{R} - \{1,2\} = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$

2. <u>Intersecciones.</u>

a) Con el eje " y **"**: Si $x = 0$; $y = \dfrac{0+0+2}{0-0+2} = 1$; $y = 1$; $P_1(0,1)$

b) Con el eje " x **"**: Si $y = 0$; $0 = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

$(0)(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 3x + 2$; $x^2 + 3x + 2 = 0$

factorizando $(x+1)(x+2) = 0$

$x + 1 = 0$; $x = -1$; $P_2(-1,0)$

$x + 2 = 0$; $x = -2$; $P_3(-2,0)$

3. <u>Simetrías.</u>

a) Con el eje " x **"**: Sustituyendo en la ecuación original la $y \xrightarrow{por} -y$ se tiene:

$$-y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(-1)(-y) = (-1)\left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}\right)$$

$y = -\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ cambió respecto a la ecuación original, luego no hay simetría con el eje "x".

b) Con el eje " y **"**: $x \xrightarrow{por} -x$; $y = \dfrac{(-x)^2 + 3(-x) + 2}{(-x)^2 - 3(-x) + 2}$

$y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ cambió respecto a la ecuación original, luego no hay simetría con el eje "y".

c) Con el origen de coordenadas: $x \to -x$, $y \to -y$

$$-y = \frac{(-x)^2 + 3(-x) + 2}{(-x)^2 - 3(-x) + 2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

$y = -\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ cambió, no hay simetría con el origen.

4. <u>Asíntotas.</u>

a) Horizontales: Por la 1ª Regla, efectuamos la división

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ \hline x^2-3x+2 & x^2+3x+2 \\ & -x^2+3x-2 \\ \hline & \quad 6x \end{array} \quad ; \quad y = \underbrace{1}_{\text{cociente}} + \frac{\overbrace{6x}^{\text{residuo}}}{x^2-3x+2}$$

$y=1$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

b) Verticales: Igualando a cero el denominador $x^2-3x+2=0$; factorizando $(x-1)(x-2)=0$; $x-1=0$; $x=1 \Rightarrow x-2=0$; $x=2$

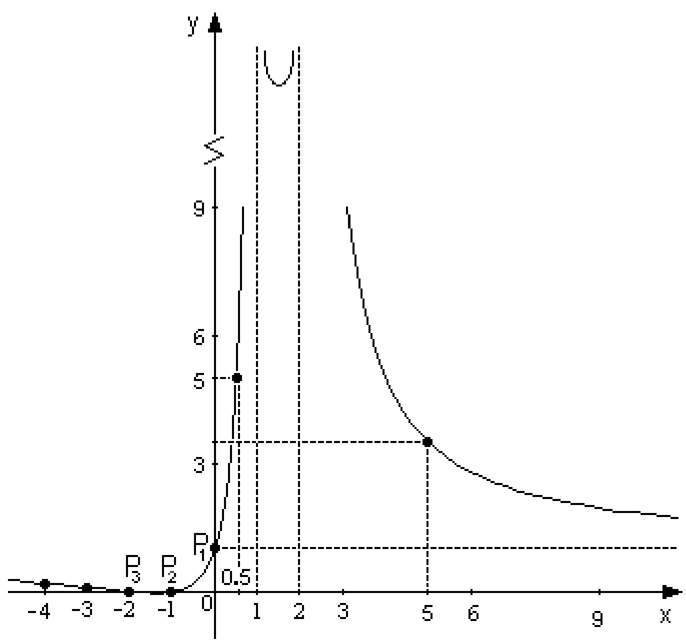
las ecuaciones $x=1$ y $x=2$ son las asíntotas verticales.

5. <u>Tabulación.</u>

De acuerdo con el dominio, se dan los siguientes valores para x:

x	-4	-3	-2	-1.5	-1	0.5	1.1	1.5	2.1	5
y	0.2	0.1	0	-0.03	0	5	$72.\overline{3}$	35	$115.\overline{54}$	3.5

6. <u>Gráfica.</u>



2) $x^2y-x-y=0$

<u>Solución</u>

1. <u>Extensión.</u>

Despejando "y" en términos de "x" se obtiene:

$$y\left(x^2-1\right)=x \quad ; \quad y=\frac{x}{x^2-1}$$

a) Dominio: $x^2-1=0$; $(x-1)(x+1)=0$; $x=1$, $x=-1$

$$\text{Dominio}=\mathbb{R}-\{-1,1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$$

2. Intersecciones.

a) Eje "x": Si $y=0$; $0=\dfrac{x}{x^2-1}$; $x=0$; $P_1(0,0)$

b) Eje "y": Si $x=0$; $y=\dfrac{0}{(0)^2-1}$; $P_1(0,0)$

3. Simetrías.

a) Eje "x": $y\to -y$; $-y=\dfrac{x}{x^2-1}$; $y=-\dfrac{x}{x^2-1}$ cambió, no hay simetría con el eje "x".

b) Eje "y": $x\to -x$; $y=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}$; $y=\dfrac{-x}{x^2-1}$ cambió, no hay simetría con el eje "y".

c) Origen: $x\to -x$, $y\to -y$; $-y=\dfrac{-x}{x^2-1}$; $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ no cambió, si hay simetría con el origen.

4. Asíntotas.

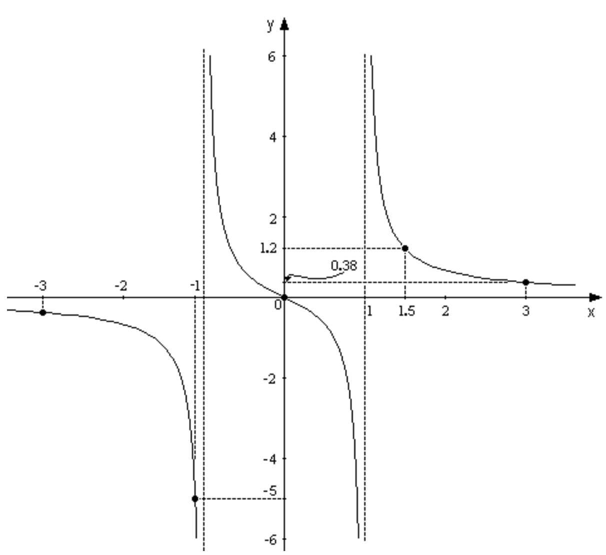
a) Horizontales: Por la 2ª Regla, la asíntota horizontal es el eje "x" cuya ecuación es $y=0$.

b) Verticales: Igualando a cero el denominador $x^2-1=0$; $(x-1)(x+1)=0$; $x=-1$ y $x=1$.

5. Tabulación.

x	-3	-1.1	-0.9	0	0.9	1.5	3
y	-0.38	-5.24	4.74	0	-4.74	1.2	0.38

6. Gráfica.

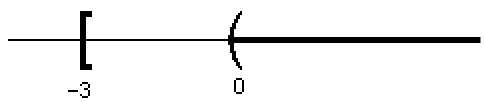


3) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$

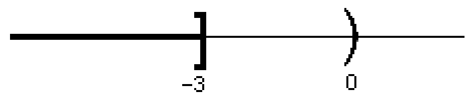
Solución

1. Extensión.

a) Dominio: Los valores permisibles para "x" son aquellos para los cuales el subradical (lo que esta dentro de la raíz cuadrada) sea positivo o cero. El subradical es positivo cuando la "x" tome valores menores que -3 inclusive y mayores que cero, esto es: $\dfrac{x+3}{x} \geq 0$; si $x > 0$ entonces $x+3 \geq 0$; donde $x \geq -3$, graficando este resultado:



Si $x < 0$ entonces $x+3 \leq 0$; donde $x \leq -3$, graficando este resultado:



$Dominio = (-\infty, -3] \cup (0, \infty)$

2. Intersecciones.

a) Eje "x": Si $y = 0$; $0 = \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$; $0 = \dfrac{x+3}{x}$; $x+3 = 0$; $x = -3$; $P_1(-3,0)$.

b) Eje "y": Si $x = 0$; $y = \sqrt{\dfrac{0+3}{0}} \notin \mathbb{R}$; no hay intersección con el eje "y".

3. Simetrías.

a) Eje "x": $y \to -y$; $-y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$; $y = -\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$ cambió, no hay simetría con el eje "x".

b) Eje "y": $x \to -x$; $y = \sqrt{\dfrac{-x+3}{-x}} = \sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$; cambió, no hay simetría con el eje "y".

c) Origen: $x \to -x$, $y \to -y$; $-y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$; $y = -\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$ cambió, no hay simetría con el origen.

4. Asíntotas.

a) Horizontales: Por la 1ª Regla, efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x & x-3 \\ & -x \\ \hline & -3 \end{array}$$

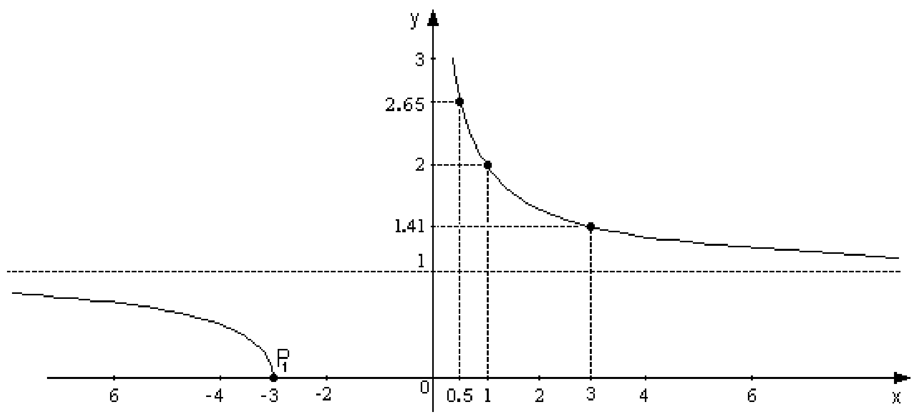
; $y = 1$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

b) Verticales: Igualando a cero el denominador $x = 0$ es la ecuación de la asíntota vertical (es el eje "y").

5. Tabulación.

x	-6	-5	0.5	1	3
y	0.71	0.63	2.65	2	1.41

6. Gráfica.



4) $y = \sqrt{x\left(4 - x^2\right)}$

Solución

1. Extensión.

a) Dominio: Los valores permisibles para "x" son los que hacen que el subradical sea no negativo, esto sucederá cuando "x" tome valores menores o iguales que -2 y valores entre cero y dos inclusive, esto es:

$x\left(4 - x^2\right) \geq 0$, descomponiendo en sus factores se tiene que $x(2 - x)(2 + x) \geq 0$, jugando con los signos de cada factor en los intervalos que nos definen las raíces $x = -2, 0, 2$ se observa que los únicos intervalos que hacen verdadera la desigualdad $x(2 - x)(2 + x) \geq 0$ son:

$Dominio = (-\infty, -2] \cup [0, 2]$

2. Intersecciones.

a) Eje "x": Si $y = 0$; $0 = \sqrt{x\left(4 - x^2\right)} = \sqrt{x(2 - x)(2 + x)}$; $x(2 - x)(2 + x) = 0$; $x = 0$; $P_1(0,0)$

$x = -2$; $P_2(-2,0)$

$x = 2$; $P_3(2,0)$

b) Eje "y": Si $x = 0$; $y = \sqrt{0\left(4 - (0)^2\right)} = \sqrt{0} = 0$; $P_1(0,0)$.

3. Simetrías.

a) **Eje "x"**: $y \to -y$; $-y = \sqrt{x(4-x^2)}$; $y = -\sqrt{x(4-x^2)}$ cambió, no hay simetría con el eje "x".

b) **Eje "y"**: $x \to -x$; $y = \sqrt{(-x)(4-(-x)^2)} = \sqrt{-x(4-x^2)}$; cambió, no hay simetría con el eje "y".

c) **Origen**: $x \to -x$, $y \to -y$; $-y = \sqrt{-x(4-x^2)}$; $y = -\sqrt{-x(4-x^2)}$ cambió, no hay simetría con el origen.

4. Asíntotas.

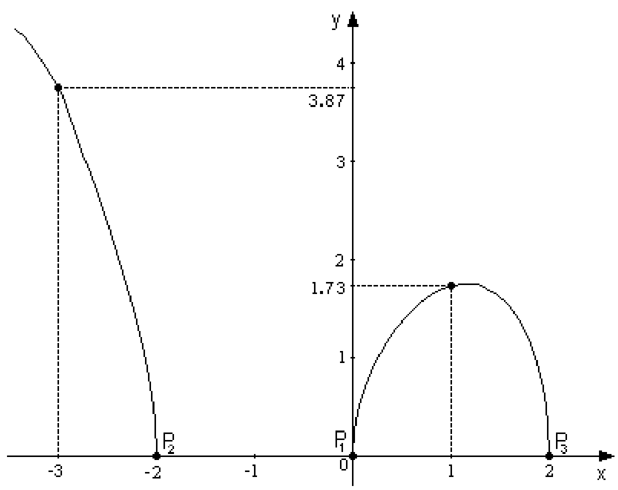
a) **Horizontales**: No hay.

b) **Verticales**: No hay.

5. Tabulación.

x	-4	-3	-2	0	1	2
y	6.93	3.87	0	0	1.73	0

6. Gráfica.



5) $-xy + x - 4 = 0$

Solución

1. Extensión.

a) **Dominio**: Despejando la "y", $y = \frac{x-4}{x}$, igualando a cero el denominador $x = 0$, los valores permisibles para "x" son todos los reales excepto cero. $Dominio = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. <u>Intersecciones.</u>

a) Eje "x": Si $y=0$; $0=\frac{x-4}{x}$; $x-4=0$; $x=4$; $P_1(4,0)$

b) Eje "y": Si $x=0$; $y=\frac{0-4}{0}$; no hay.

3. <u>Simetrías.</u>

a) Eje "x": $y \to -y$; $-y=\frac{x-4}{x}$; $y=-\frac{x-4}{x}$ cambió, no hay simetría con el eje "x".

b) Eje "y": $x \to -x$; $y=\frac{-x-4}{-x}=\frac{x+4}{x}$; cambió, no hay simetría con el eje "y".

c) Origen: $x \to -x$, $y \to -y$; $-y=\frac{x+4}{x}$; $y=-\frac{x+4}{x}$ cambió, no hay simetría con el origen.

4. <u>Asíntotas.</u>

a) Horizontales: Por la 1ª Regla, efectuando la división:

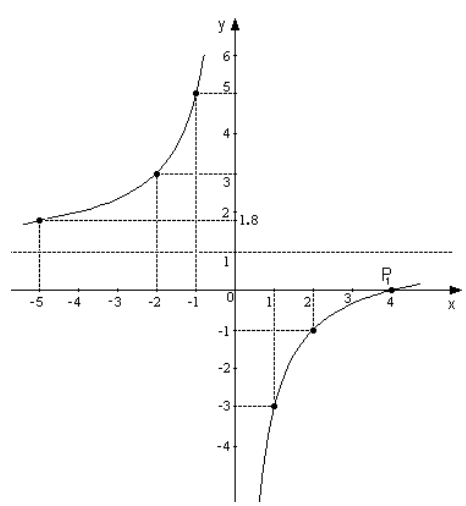
$$y=\frac{x-4}{x}=1-\frac{4}{x} \text{ ; } y=1 \text{ es la ecuación de la asíntota horizontal.}$$

b) Verticales: Igualando a cero el denominador $x=0$ es la ecuación de la asíntota vertical (es el eje "y").

5. <u>Tabulación.</u>

x	-5	-2	-1	1	2
y	1.8	3	5	-3	-1

6. <u>Gráfica.</u>



EJERCICIOS

Discutir la ecuación dada en cada inciso.

1) $x^2y - xy - 2x^2 - 2y - x + 5 = 0$

2) $x^2y - 2xy - x - 3 = 0$

3) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 9}}$

4) $y = \sqrt{x^2(x-1)}$

5) $xy - 2x - 2y + 6 = 0$

VI. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Objetivos: Que el alumno:

1. Explicara que es un lugar geométrico.
2. Dadas las restricciones que caracterizan a un lugar geométrico, sea capaz de determinar su ecuación.
3. Dadas las coordenadas de los vértices de un triángulo, sea capaz de determinar sus rectas y puntos notables.
4. Dadas las coordenadas de un punto y la ecuación de una recta, sea capaz de determinar la distancia del punto a la recta.
5. Dadas las ecuaciones de dos rectas, sea capaz de determinar la distancia entre ellas.

6.1. ECUACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

En el capítulo anterior (V), se trató uno de los problemas centrales de la Geometría Analítica (Discutir una ecuación) para trazar su gráfica, un segundo problema central de la Geometría Analítica es el que trataremos aquí y consiste en “Dada una curva definida por ciertas condiciones geométricas, obtener su ecuación” dando esto origen al concepto de lugar geométrico.

El lugar geométrico de una ecuación de la forma $f(x,y)=0$, son todos los puntos (x,y) cuyas coordenadas x,y satisfacen dicha ecuación.

Dos números reales x_0 y y_0 satisfacen a una ecuación en dos variables de la forma $f(x,y)=0$, si al sustituirlos en la ecuación en lugar de las variables x y y resulta una igualdad verdadera, por ejemplo los números $x=3$ y $y=2$ satisfacen la ecuación $x^2+y^2-13=0$, entonces se dice que el punto de coordenadas $(3,2)$ se sitúa sobre la gráfica de $x^2+y^2-13=0$, de lo contrario, no lo estaría.

Encontrar un lugar geométrico, equivale a encontrar la ecuación que lo representa.

Es conveniente describir un lugar geométrico como la trayectoria de un punto $P(x,y)$ que se mueve de acuerdo a ciertas restricciones debidamente especificadas.

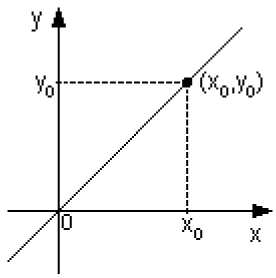
EJEMPLOS

En cada inciso, se pide deducir la ecuación del lugar geométrico de acuerdo a las restricciones indicadas.

1) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ que durante su movimiento está situado en el 1° y 3° cuadrantes a igual distancia de los ejes coordenados x y y.

Solución

El lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las restricciones dadas, está representado por la ecuación $x - y = 0$ ó $y = x$, cuya gráfica se muestra.

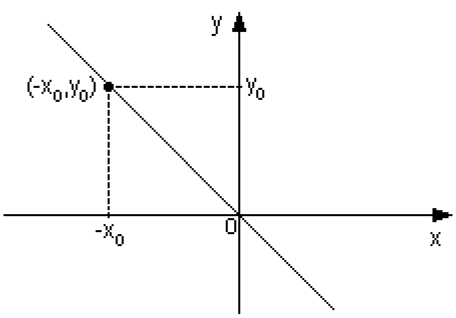


Cualquier punto de coordenadas (x_0, y_0) donde $y_0 = x_0$, está sobre la recta $y = x$ que es la ecuación del lugar geométrico que resuelve el problema.

2) La trayectoria del punto $P(x, y)$ que durante su movimiento está situado en el 2° y 4° cuadrantes a igual distancia de los ejes coordenados.

Solución

El lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las restricciones del problema, está representado por la ecuación $x + y = 0$ ó $y = -x$ cuya gráfica es:

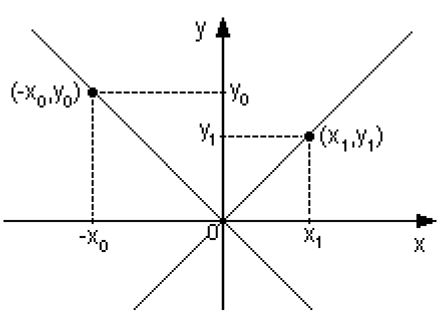


Cualquier punto de coordenadas (x_0, y_0) donde $y_0 = -x_0$ está sobre la recta $y = -x$ que es la ecuación del lugar geométrico que resuelve el problema.

3) La trayectoria del punto $P(x, y)$ que durante su movimiento está situado en el 1° y 3° cuadrantes y en el 2° y 4° cuadrantes a igual distancia de los ejes coordenados.

Solución

El lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las restricciones dadas, está representado por la ecuación $(x - y)(x + y) = 0$ ó $x^2 - y^2 = 0$, esto es, por las dos rectas $y = x$ y $y = -x$ cuya gráfica es:



Cualquier punto de coordenadas (x_0, y_0) donde $y_0 = -x_0$ está sobre $y = -x$, cualquier punto de coordenadas (x_1, y_1) donde $y_1 = x_1$ está sobre la recta $y = x$, que son las ecuaciones del lugar geométrico que resuelve el problema.

4) ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria del punto $P(x, y)$ que durante su movimiento, equidista de los extremos de un segmento de recta $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$.

Solución

Recordar que la palabra equidistar significa igualdad de distancias, por lo que las distancias $AP = BP$, lo que algebraicamente es:

$$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2} = \sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando y simplificando términos semejantes:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = (x-x_B)^2+(y-y_B)^2$$

$$x^2-2xx_A+x_A^2+y^2-2yy_A+y_A^2 = x^2-2xx_B+x_B^2+y^2-2yy_B+y_B^2$$

$$2xx_B-2xx_A+2yy_B-2yy_A+x_A^2+y_A^2-x_B^2-y_B^2=0$$

$$2x(x_B-x_A)+2y(y_B-y_A)+x_A^2+y_A^2-x_B^2-y_B^2=0$$

Esta última expresión es la ecuación del lugar geométrico con las restricciones dadas.

5) Obtener la ecuación de la trayectoria del punto $P(x, y)$ que durante su movimiento, se encuentra a la misma distancia "r" del punto $A(x_A, y_A)$.

Solución

Si en la trayectoria del punto $P(x, y)$, este siempre se encuentra a la misma distancia "r" del punto $A(x_A, y_A)$ entonces: $AP = r$, esto algebraicamente es:

$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2} = r$, elevando ambos miembros, desarrollando y ordenando términos se tiene:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = r^2$$

$$x^2-2xx_A+x_A^2+y^2-2yy_A+y_A^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2-2x_Ax-2y_Ay+x_A^2+y_A^2-r^2=0$$

Esta última expresión es la ecuación del lugar geométrico del problema.

EJERCICIOS

En cada inciso deduzca la ecuación del lugar geométrico.

1) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que durante su movimiento se conserve siempre equidistante de los puntos $A(-2,1)$ y $B(4,5)$.

2) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que durante su movimiento se encuentra a la distancia $r=3$ unidades del punto $A(2,-1)$.

3) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que se mueve sobre una línea recta que pasa por el punto $A(3,-2)$ y tiene pendiente $m=2$.

4) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que durante su movimiento, su distancia al eje "y" es igual a su distancia con el punto $A(3,0)$.

5) La trayectoria de un punto $P(x,y)$ es tal que durante su movimiento está 2 veces más alejado del eje "y" que del punto $A(3,0)$.

6.2. DEFINICIÓN DE RECTA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

El objetivo fundamental de la Geometría Analítica es el estudio de las ecuaciones algebraicas de la forma $f(x,y)=0$, en el presente capítulo y en los siguientes continuaremos su estudio con ecuaciones algebraicas de la forma siguiente:

$$Ax+By+C=0 \qquad \text{———————} \; (\mathrm{I})$$
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad \text{———————} \; (\mathrm{II})$$
$$Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Ex^2+Fxy+Gy^2+Hx+Iy+k=0 \qquad \text{———————} \; (\mathrm{III})$$
$$\vdots$$

En donde $A,B,C,D,$ **...** son números reales y son los coeficientes numéricos de las ecuaciones. La ecuación (I) se llama <u>"ecuación general de primer grado"</u>, donde A y B no pueden ser simultáneamente cero. La ecuación (II) se llama <u>"ecuación general de segundo grado"</u>, donde A,B y C no sean simultáneamente cero. La ecuación (III) se llama <u>"ecuación general de tercer grado"</u>, donde los coeficientes A,B,C y D no sean simultáneamente cero. Las ecuaciones de grados mayores se expresan de forma análoga.

Es conveniente aclarar que en este libro se estudiarán únicamente las de las formas (I) y (II).

<u>Definición.</u>

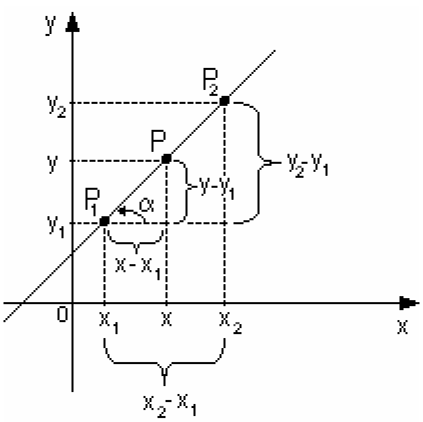
El lugar geométrico de una ecuación de primer grado $Ax+By+C=0$ es una línea recta y recíprocamente, toda línea recta se determina por una ecuación de primer grado.

- Se dice que toda ecuación de la forma (I) es lineal.

6.3. ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIDOS:

a) DOS PUNTOS.
b) LA PENDIENTE Y UN PUNTO.
c) LA PENDIENTE Y LA ORDENADA AL ORIGEN.
d) LAS INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS.
e) LA DISTANCIA AL ORIGEN Y UN ÁNGULO.

a) Ecuación no perpendicular al eje "x" de una recta que pasa por dos puntos conocidos.



Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los dos puntos cuyas coordenadas se conocen, la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, consideremos un punto cualquiera $P(x, y)$ situado sobre la misma recta, la pendiente de la recta que pasa por $P(x, y)$ y $P_1(x_1, y_1)$ es la misma "m" o sea: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$; $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, arreglando esta última expresión como sigue: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, es más práctico recordarla y aplicarla para obtener la ecuación de la recta pedida como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados.

1) $P_1(2,-3)$, $P_2(5,4)$

Solución

Sustituyendo las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 en la expresión $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$:

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y+3}{4+3} \; ; \; \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{7}$$

$$7(x-2) = 3(y+3) \; ; \; 7x - 14 = 3y + 9$$

$7x - 3y - 23 = 0$ es la ecuación buscada.

2) $A(-2,-1)$, $B(4,-4)$

Solución

$$\frac{x-x_B}{x_A-x_B}=\frac{y-y_B}{y_A-y_B}\ ;\ \frac{x-4}{-6}=\frac{y+4}{3}\ ;\ 3x-12=-6y-24$$

$3x+6y+12=0$ es la ecuación buscada.

3) $D(-3,3)$, $E(4,2)$

Solución

$$\frac{x-x_E}{x_D-x_E}=\frac{y-y_E}{y_D-y_E}\ ;\ \frac{x-4}{-7}=\frac{y-2}{1}\ ;\ 1(x-4)=-7(y-2)$$

$$x-4=-7y+14\ ;\ 7y-14=0$$

$x-7y+10=0$ es la ecuación buscada.

4) $F(5,5)$, $G(4,-2)$

Solución

$$\frac{x-x_G}{x_F-x_G}=\frac{y-y_G}{y_F-y_G}\ ;\ \frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{7}\ ;\ 7(x-4)=1(y+2)\ ;\ 7x-28=y+2$$

$7x-y-30=0$ es la ecuación buscada.

5) $H(0,0)$, $I(3,5)$

Solución

$$\frac{x-x_I}{x_H-x_I}=\frac{y-y_I}{y_H-y_I}\ ;\ \frac{x-3}{-3}=\frac{y-5}{-5}\ ;\ -5(x-3)=-3(y-5)\ ;\ -5x+15=-3y+15$$

$5x-3y=0$ es la ecuación buscada.

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

1) $A(-2,3),\ B(4,-1)$

2) $C(-1,1),\ D(2,4)$

3) $P_1(-4,0),\ P_2(2,1)$

4) $Q(1,1),\ R(3,3)$

5) $M(-2,-4),\ N(-1,4)$

b) Ecuación de una recta (no perpendicular al eje "x") conocidos su pendiente y un punto.

Sean "m" y $P_1(x_1, y_1)$ la pendiente y un punto conocidos de la recta, considerando un punto cualquiera $P(x,y)$ situado sobre la misma recta, la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x,y)$ y $P_1(x_1,y_1)$ es la misma "m", esto es:

$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=m$, escribiéndola como $y-y_1=m(x-x_1)$ es la ecuación buscada.

Llamada ecuación "punto –pendiente"

EJEMPLOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta conocidos su pendiente y un punto de ella.

1) $P_1(1,2),\ m=\dfrac{2}{3}$

Solución

Si $y-y_1=m(x-x_1)$, sustituyendo los valores conocidos se tiene:

$$y-2=\frac{2}{3}(x-1)\ ;\ 3(y-2)=2(x-1)\ ;\ 3y-6=2x-2$$

$2x-3y+4=0$ es la ecuación buscada.

2) $A(-2,-3),\ m=1$

Solución

$$y+3=1(x+2)\ ;\ y+3=x+2$$
$$x-y-1=0$$

3) $O(0,0)$, $m=-2$

Solución

$$y-0=-2(x-0)\ ;\ y=-2x$$
$$2x+y=0$$

4) $B(2,2)$, $m=0$

Solución

En la sección 4.9 se dijo que si la pendiente de una recta es nula, se trata de una recta paralela al eje "x" (es horizontal). En este caso, observamos que la ecuación de toda recta horizontal será de la forma $y=b$, donde el valor "b" es donde la recta interfecta al eje "y" (se llama ordenada al origen) esto indica que cualquier punto sobre una recta paralela al eje "x" (horizontal) el valor de su ordenada siempre será "b".

$$y-2=0(x-2)\ ;\ y-2=0$$

$$y=2$$

5) $C(4,-2)$, $m=-\frac{1}{2}$

Solución

$$y+2=-\frac{1}{2}(x-4)\ ;\ 2(y+2)=-1(x-4)\ ;\ 2y+4=-x+4$$

$$x+2y=0$$

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta conocidos su pendiente y un punto de ella.

1) $P_1(-2,-1)$, $m=-\frac{3}{4}$

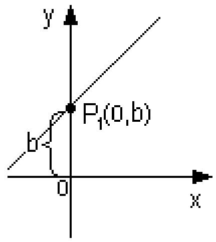
2) $P_2(5,3)$, $m=-1$

3) $P_3(0,3)$, $m=-\frac{2}{3}$

4) $P_4(4,0)$, $m=2$

5) $P_5(-3,-2)$, $m=\frac{1}{4}$

c) <u>Ecuación de una recta (no perpendicular al eje "x") conocidos su pendiente y la ordenada al origen.</u>



Este caso es similar al anterior del inciso b), donde $P_1(0, y_1)$ es el punto de intersección de la recta con el eje "y" y "m" su pendiente, y_1 es la magnitud de la ordenada al origen de coordenadas y se acostumbra denotarla con la letra "b" o sea que $P_1(0,b)$.

Aplicando la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$, sustituyendo valores, simplificando y ordenando términos se tiene:

$$y - b = m(x - 0); \ y - b = mx \ ; \ y = mx + b$$

o bien $mx - y + b = 0$ que es la ecuación buscada.

Llamada "ecuación de la forma pendiente-ordenada al origen".

EJEMPLOS

En cada inciso, obtener la ecuación de la recta conocidos su pendiente y la ordenada al origen.

1) $P_1(0,3), \ m = \frac{1}{4}$

<u>Solución</u>

Sea $y = mx + b$, sustituyendo los valores conocidos se tiene:

$$y = \frac{1}{4}x + 3 \text{ ó } \frac{1}{4}x - y + 3 = 0 \text{ ó } x - 4y + 12 = 0$$

2) $A(0,-2), \ m = 3$

<u>Solución</u>

$$y = mx + b \ ; \ y = 3x - 2 \text{ ó } 3x - y - 2 = 0$$

3) $B\left(0, \frac{1}{2}\right), \ m = -1$

<u>Solución</u>

$$y = mx + b \ ; \ y = -1x + \frac{1}{2} \ ; \ y = -x + \frac{1}{2}$$

$$\text{ó } \ x + y - \frac{1}{2} = 0 \ \text{ ó } \ 2x + 2y - 1 = 0$$

4) $C(0,0)$, $m=1$

Solución

$$y=mx+b\ ;\ y=1x+0\ ;\ y=x \text{ ó } x-y=0$$

5) $b=\frac{5}{4}$, $m=-\frac{1}{3}$

Solución

$$y=mx+b\ ;\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{4} \text{ ó } \frac{1}{3}x+y-\frac{5}{4}=0 \text{ ó } 4x+12y-15=0$$

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta conocidos su pendiente y su ordenada al origen.

1) $P_1(0,-3)$, $m=-4$

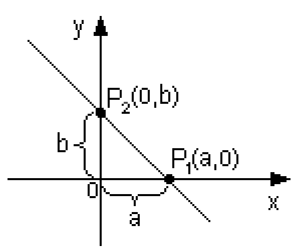
2) $b=2$, $m=\frac{4}{3}$

3) $A(0,-1)$, $m=0$

4) $b=-\frac{2}{3}$, $m=-\frac{1}{2}$

5) $B\left(0,\frac{5}{3}\right)$, $m=3$

d) Ecuación de una recta conocidas las intersecciones de la recta con los ejes coordenados.



Este caso es similar al del inciso a) donde se conocen las coordenadas de dos puntos de la recta, en este caso, sean $P_1(a,0)$ y $P_2(0,b)$ los puntos donde la recta cruza al eje "x" y al eje "y" respectivamente. Aplicando la expresión $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ del inciso a) y sustituyendo los valores de las coordenadas de los puntos conocidos, se tiene: $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$; simplificando y ordenando términos, $\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}$; $-\frac{x}{a}+\frac{a}{a}=\frac{y}{b}$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ esta última es la ecuación buscada, donde "a" es la magnitud de la intersección de la recta con el eje "x" y "b" es la magnitud de la intersección de la recta con el eje "y".

EJEMPLOS

En cada inciso, obtener la ecuación de la recta, conocidos las intersecciones con los ejes coordenados.

1) $P_1(3,0)$, $P_2(0,-1)$

Solución

Sea $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, entonces $\frac{x}{3}+\frac{y}{-1}=1$ ó haciendo operaciones, $x-3y-3=0$

2) $a=-2$, $b=3$

Solución

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ ;\ \frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1\ ;\ 3x-2y+6=0$$

3) $A(0,4)$, $B(2,0)$

Solución

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ ;\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1\ ;\ 4x+2y-8=0$$

4) $b=-5$, $a=-3$

Solución

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ ;\ \frac{x}{-3}+\frac{y}{-5}=1\ ;\ 5x+3y+15=0$$

5) $P_1(0,-1)$, $P_2(4,0)$

Solución

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ ;\ \frac{x}{4}+\frac{y}{-1}=1\ ;\ x-4y-4=0$$

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la ecuación de la recta, conocidas sus intersecciones con los ejes coordenados.

1) $P_1(-1,0)$, $P_2(0,3)$

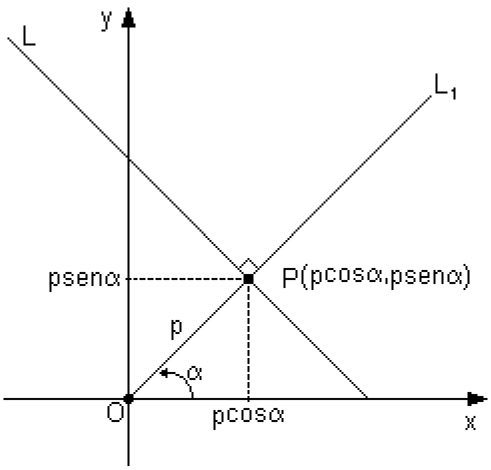
2) $a=3$, $b=-3$

3) $A(0,2)$, $B(4,0)$

4) $b=3$, $a=5$

5) $P_1(1,0)$, $P_2(0,-4)$

e) Ecuación de una recta conocidos la distancia al origen y un ángulo.



Consideremos una línea recta "L" cualquiera y otra recta "L_1" llamada normal perpendicular a "L" que pasa por el origen de coordenadas O, la magnitud del segmento $\overline{OP}$ es "p" y "α" es la inclinación de la recta normal "L_1", la pendiente de la recta "L_1" es $m_1 = \tan\alpha$ y como la recta "L" es perpendicular a la recta "L_1", su pendiente es recíproca y de signo contrario a la pendiente de "L_1" o sea que la pendiente de la recta "L" es $-\frac{1}{\tan\alpha} = -\cot\alpha$, si las coordenadas del punto P son $(p\cos\alpha, psen\alpha)$, aplicando la ecuación del inciso b) $y - y_1 = m(x - x_1)$, sustituyendo valores y ordenando se tiene:

$$y - psen\alpha = -\cot\alpha(x - p\cos\alpha)\ ;\ y - psen\alpha = -\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}(x - p\cos\alpha)$$

$$y - psen\alpha = \frac{-x\cos\alpha + p\cos^2\alpha}{sen\alpha}\ ;\ sen\alpha(y - psen\alpha) = -x\cos\alpha + p\cos^2\alpha$$

$$ysen\alpha - psen^2\alpha = -x\cos\alpha + p\cos^2\alpha\ ;\ x\cos\alpha + ysen\alpha = p(sen^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

como $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $x\cos\alpha + ysen\alpha = p$

$x\cos\alpha + ysen\alpha - p = 0$ es la ecuación buscada y se le llama **ECUACIÓN NORMAL** de la recta L.

Nota: En este caso si $\alpha = 90^0$, se trata de una recta paralela al eje "x" (horizontal), si $\alpha = 0^0$, se trata de una recta (vertical) paralela al eje "y".

EJEMPLOS

En cada inciso, obtenga la ecuación de la recta en forma normal conocidos la distancia al origen "p" y su ángulo "α".

1) $p = 5$, $\alpha = 30^0$

Solución

Si $x\cos\alpha + ysen\alpha - p = 0$, sustituyendo valores se tiene: $x\cos 30^0 + ysen30^0 - 5 = 0$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-5=0 \quad ; \quad ó \quad \sqrt{3}x+y-10=0$$

2) $p=4$, $\alpha=135^0$

<u>Solución</u>

Si $x\cos\alpha+ysen\alpha-p=0$; $x\cos 135^0+ysen135^0-4=0$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-4=0$

$$-x+y-4\sqrt{2}=0 \quad ó \quad x-y+4\sqrt{2}=0$$

3) $p=1$, $\alpha=200^0$

<u>Solución</u>

Si $x\cos\alpha+ysen\alpha-p=0$; $x\cos 200^0+ysen200^0-1=0$
$-0.94x-0.34y-1=0$ ó $0.94x+0.34y+1=0$

4) $p=2.5$, $\alpha=278^0$

<u>Solución</u>

Si $x\cos\alpha+ysen\alpha-p=0$; $x\cos 278^0+ysen278^0-2.5=0$; $0.14x-0.99y-2.5=0$

5) $p=3$, $\alpha=40^0$

<u>Solución</u>

Si $x\cos\alpha+ysen\alpha-p=0$; $x\cos 40^0+ysen40^0-3=0$; $0.77x+0.64y-3=0$

EJERCICIOS

En cada inciso, obtenga la ecuación de la recta en forma normal conocidos la distancia al origen “ p ” y su ángulo “ α ”.

1) $p=1.7$, $\alpha=50^0$
2) $p=3.5$, $\alpha=120^0$
3) $p=2$, $\alpha=190^0$
4) $p=4.2$, $\alpha=270^0$
5) $p=0$, $\alpha=90^0$

6.4. FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA: GENERAL, SIMPLIFICADA, SIMÉTRICA Y NORMAL

A la forma en que se escribe la ecuación de primer grado $Ax+By+C=0$, se le llama **FORMA GENERAL** de la recta, donde A,B y C son cualesquiera números reales pero A y B no pueden ser simultáneamente cero.

Si $B=0$, entonces $A\neq 0$ y la ecuación queda $Ax+C=0$, despejando "x" se tiene $x=-\frac{C}{A}$, es la ecuación de una recta vertical (donde $-\frac{C}{A}=a$ es la intersección de la recta con el eje "x"), si $a=0$ entonces $x=0$ es la ecuación del eje "y".

Si $A=0$, entonces $B\neq 0$ y la ecuación queda $By+C=0$, despejando "y" se tiene $y=-\frac{C}{B}$, es la ecuación de una recta horizontal (donde $-\frac{C}{B}=b$ es la intersección de la recta con el eje "y"), si $b=0$ entonces $y=0$ es la ecuación del eje "x".

Si $C=0$, entonces la ecuación queda $Ax+By=0$, despejando "y" se tiene $y=-\frac{A}{B}x$, es la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas $0(0,0)$ (donde $-\frac{A}{B}=m$, es la pendiente de la recta).

En la forma general si $B\neq 0$, al despejar la "y" se tiene: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, denotando por $m=-\frac{A}{B}$ y $b=-\frac{C}{B}$ se tiene que $y=mx+b$, a esta expresión se le llama ecuación de la recta en **FORMA SIMPLIFICADA** o **FORMA PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN**.

Si la forma general $Ax+By+C=0$ con A,B y $C\neq 0$, la expresamos como $Ax+By=-C$ y dividiendo ambos miembros por $-C$ se tiene: $\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$ ó $\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$ denotando por $a=-\frac{C}{A}$ y $b=-\frac{C}{B}$ se tiene $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ a esta expresión se le llama ecuación de la recta en **FORMA SIMÉTRICA**, donde el significado geométrico de "a" es la intersección de la recta con el eje "x" y "b" es la intersección de la recta con el eje "y" (ver sección 6.3 d)).

En la sección 6.3 e) de este capítulo VI, obtuvimos la ecuación de la recta en su **FORMA NORMAL**: $x\cos\alpha+y\,sen\alpha-p=0$ y se recomienda reestudiarla.

EJEMPLOS

En cada inciso, se da la forma general de la ecuación de una recta y se pide obtener las formas simplificada, simétrica y normal de la misma recta y dibuje su gráfica.

1) $2x-3y+1=0$

Solución

Si $m=-\frac{A}{B}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$; $b=-\frac{C}{B}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$ y como $y=mx+b$ es la forma simplificada, $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

Si $a=-\frac{C}{A}=-\frac{1}{2}$ y $b=\frac{1}{3}$ y como $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ es la forma simétrica, $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}=1$.

Para obtener la forma normal a partir de la forma general, se debe hacer el siguiente análisis:

Si la ecuación de la recta en forma general $Ax+By+C=0$ ●●●(1) y la ecuación en forma normal $x\cos\alpha+y sen\alpha-p=0$ ●●●(2) determinan la misma recta, sus coeficientes deben ser proporcionales, lo cual significa que multiplicando todos los términos de la ecuación (1) por un factor de proporcionalidad "k", se tiene que:

$kAx+kBy+kC=(\cos\alpha)x+(sen\alpha)y-p$

donde: $kA=\cos\alpha$ ●●●(3)

$kB=sen\alpha$ ●●●(4)

$kC=-p$ ●●●(5)

Como nuestro problema es determinar el valor de "k", elevamos al cuadrado ambos miembros de (3) y (4) y sumándolos miembro a miembro tenemos:

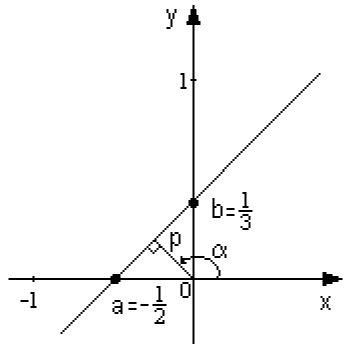
$k^2A^2+k^2B^2=\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$

factorizando $k^2(A^2+B^2)=1$ y despejando "k": (6)●●● $k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; con $A^2+B^2\neq 0$.

La ecuación de la recta en forma general $Ax+By+C=0$ tiene por ecuación en la forma normal: (7)●●● $\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$; $A^2+B^2\neq 0$

Pero surge la pregunta ¿qué signo se debe usar en el radical? (al comparar (7) con (2)), la respuesta es la siguiente, "se requiere que $p\geq 0$", por tanto:

i) Si $C\neq 0$, el signo del radical se toma contrario al de "C".
ii) Si $C=0$ y $B\neq 0$, el radical y "B" tienen el mismo signo.
iii) Si $C=B=0$, el radical y "A" tienen el mismo signo.

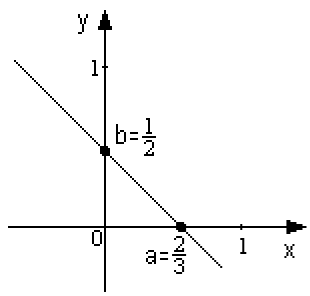


Ahora sí, continuando con el ejemplo, si la ecuación general es $2x-3y+1=0$, como "C" es positivo, el radical debe ser de signo contrario, entonces: $k=\dfrac{1}{-\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ y la ecuación en <u>forma normal</u> es: $-\dfrac{2}{\sqrt{13}}x+\dfrac{3}{\sqrt{13}}-\dfrac{1}{\sqrt{13}}=0$

donde $\alpha=\cos^{-1}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)=123.69^0$; $p=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\approx 0.28$

2) $3x+4y-2=0$

<u>Solución</u>



Si $m=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{3}{4}$; $b=-\dfrac{C}{B}=-\dfrac{2}{-4}=\dfrac{1}{2}$; $a=-\dfrac{C}{A}=-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{2}{3}$

entonces $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$ es la <u>forma simplificada</u>.

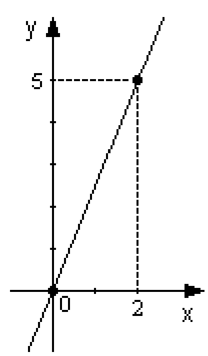
$y=\dfrac{x}{\frac{2}{3}}+\dfrac{y}{\frac{1}{2}}=1$ es la <u>forma simétrica</u>.

Como "C" es negativo $k=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{1}{5}=0$ es la <u>forma normal</u>.

3) $5x-2y=0$

<u>Solución</u>



Si $m=-\dfrac{A}{B}=-\dfrac{5}{-2}=\dfrac{5}{2}$; $b=-\dfrac{C}{B}=-\dfrac{0}{-2}=0$; $a=-\dfrac{C}{A}=-\dfrac{0}{5}=0$

entones $y=\dfrac{5}{2}x$ es la <u>forma simplificada</u>.

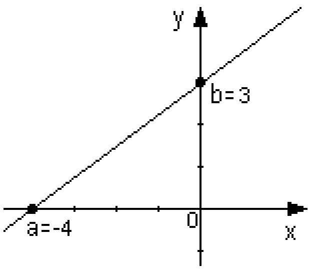
No existe <u>forma simétrica</u> porque tanto $a=0$ como $b=0$ y no se puede dividir entre cero.

Como "$C=0$" y $B\neq 0$; $k=\dfrac{1}{-\sqrt{A^2+B^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{(5)^2+(-2)^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{29}}$

$-\dfrac{5}{\sqrt{29}}+\dfrac{2}{\sqrt{29}}=0$ es la <u>forma normal</u>.

4) $\frac{5}{4}x-\frac{5}{3}y+5=0$

Solución



Si la ecuación dada, la multiplicamos en ambos miembros por 12 se tiene $15x-20y+60=0$, ecuación que es equivalente a la original, donde: $m=-\frac{A}{B}=-\frac{15}{-20}=\frac{3}{4}$; $b=-\frac{C}{B}=-\frac{60}{-20}=3$; $a=-\frac{C}{A}=-\frac{60}{15}=-4$

entonces $y=\frac{3}{4}x+3$ es la <u>forma simplificada.</u>

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$ es la <u>forma simétrica.</u>

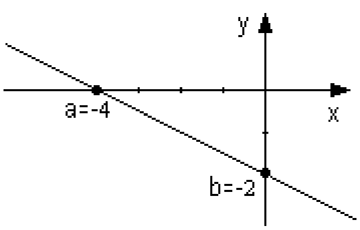
Como $C>0$, $k=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{(15)^2+(-20)^2}}=-\frac{1}{25}$

$-\frac{15}{25}x+\frac{20}{25}y-\frac{60}{25}=0$ simplificando: $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{12}{5}=0$ es la <u>forma normal</u>.

5) $x+2y+4=0$

Solución

Si $m=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{2}$; $b=-\frac{C}{B}=-\frac{4}{2}=-2$; $a=-\frac{C}{A}=-\frac{4}{1}=-4$



$y=-\frac{1}{2}x-2$ es la <u>forma simplificada</u>.

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{-2}=1$ es la <u>forma simétrica</u>.

Como $C>0$, $k=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ entonces:

$-\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{4}{\sqrt{5}}=0$ es la <u>forma normal</u>.

EJERCICIOS

En cada inciso, dada la forma general de la ecuación de una recta, se piden las formas simplificada, simétrica y normal de la recta dada y dibuje su gráfica.

1) $-3x+2y-1=0$

2) $4x-3y+2=0$

3) $2x+5y=0$

4) $\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-4=0$

5) $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+1=0$

6.5. ECUACIONES DE: LAS MEDIANAS, MEDIATRICES Y ALTURAS DE UN TRIÁNGULO, SUS PUNTOS DE INTERSECCIÓN Y RECTA DE EULER

Iniciemos esta sección definiendo la geometría de cada uno de los conceptos del tema en cuestión:

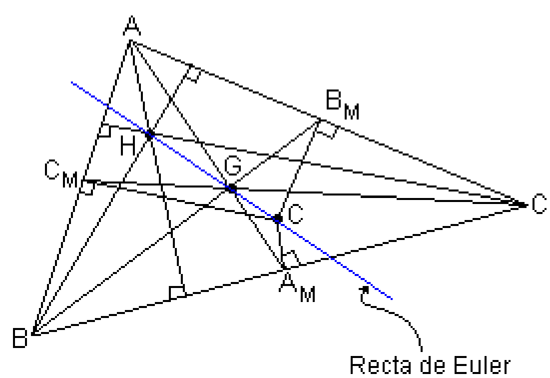
- Las medianas son rectas que parten de cada vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto.
  Las 3 medianas de un triángulo se intersectan en un mismo punto "G" llamado "centro de gravedad" (baricentro o gravicentro).
- La mediatriz de cada lado del triángulo es la recta que parte del punto medio de cada lado y es perpendicular a este.

  Las 3 mediatrices de un triángulo se intersectan en un mismo punto "C" llamado "circuncentro" (centro de un circulo que circunscribe al triángulo).

- Las alturas de un triángulo son las rectas que parten de cada vértice y son perpendiculares a su lado opuesto.

  Las 3 alturas de un triángulo se intersectan en un mismo punto "H" llamado "ortocentro".

- Los 3 puntos G, C y H se localizan sobre la misma recta, llamada "recta de Euler".



$$\left.\begin{array}{l} AA_M \\ BB_M \\ CC_M \end{array}\right\} \text{Medianas}$$

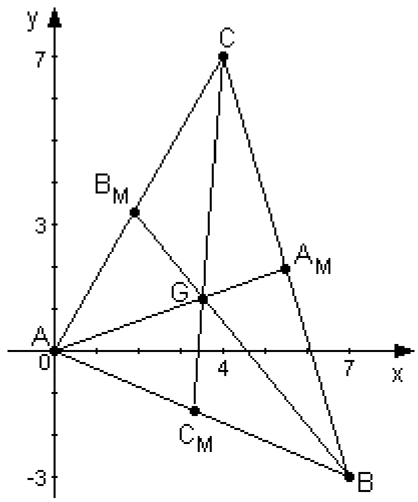
$$\left.\begin{array}{l} A_M C \\ B_M C \\ C_M C \end{array}\right\} \text{Mediatrices}$$

$$\left.\begin{array}{l} AH \\ BH \\ CH \end{array}\right\} \text{Alturas}$$

EJEMPLOS

Los puntos $A(0,0)$, $B(7,-3)$ y $C(4,7)$ son los vértices de un triángulo, hallar lo que se pide en cada inciso:

1) Las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección "G", haga un dibujo del problema.



Las coordenadas de los puntos medios de cada lado del triángulo:

$$A_M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{7+4}{2},\frac{-3+7}{2}\right)=\left(\frac{11}{2},2\right)$$

$$B_M\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{0+4}{2},\frac{0+7}{2}\right)=\left(2,\frac{7}{2}\right)$$

$$C_M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{0+7}{2},\frac{0-3}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

Ecuaciones de las medianas: con la expresión $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ de la sección 6.3 a)

Mediana AA_M: $\frac{x-0}{\frac{11}{2}-0}=\frac{y-0}{2-0}$; $\frac{x}{\frac{11}{2}}=\frac{y}{2}$; $4x=11y$; $\boxed{4x-11y=0}$

Mediana BB_M: $\frac{x-7}{2-7}=\frac{y+3}{\frac{7}{2}+3}$; $\frac{x-7}{-5}=\frac{2y+6}{13}$; $13x-91=-10y-30$; $\boxed{13x+10y-61=0}$

Mediana CC_M: $\frac{x-4}{\frac{7}{2}-4}=\frac{y-7}{-\frac{3}{2}-7}$; $\frac{x-4}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-7}{-\frac{17}{2}}$; $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-7}{-17}$; $\boxed{17x-y-61=0}$

Para obtener las coordenadas del punto de intersección "G" de las 3 medianas, elegimos dos cualesquiera de las ecuaciones de las medianas y las resolvemos como un sistema de ecuaciones simultáneas por cualquiera de los métodos de solución:

Sean AA_M: $4x-11y=0$
BB_M: $13x+10y-61=0$

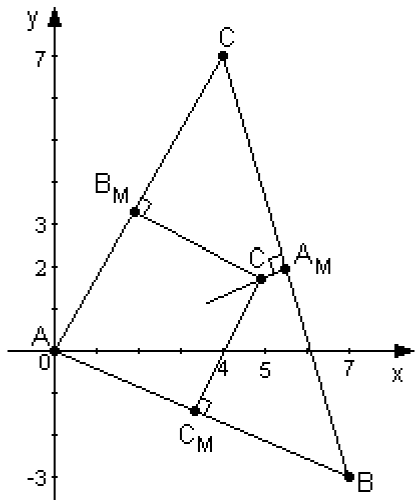
Por el método de sustitución, de AA_M despejamos la $y=\frac{4}{11}x$ y la sustituimos en la ecuación BB_M, $13x+10\left(\frac{4}{11}x\right)-61=0$ y resolvemos para x: $143x+40x-671=0$

$$183x=671\ ;\ x=\frac{11}{3}$$

sustituyendo este valor en $y=\frac{4}{11}\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{4}{3}$, por lo tanto $\boxed{G\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)}$.

2) Las ecuaciones de las mediatrices y las coordenadas de su punto de intersección "C", haga un dibujo del problema.

Solución



Las coordenadas de los puntos medios de cada lado ya se calcularon en el inciso anterior: $A_M\left(\frac{11}{2},2\right)$, $B_M\left(2,\frac{7}{2}\right)$, $C_M\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

Las pendientes de cada lado del triángulo son:

lado AB: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-3-0}{7-0}=-\frac{3}{7}$

lado BC: $m=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{7+3}{4-7}=-\frac{10}{3}$

lado CA: $m=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{0-7}{0-4}=\frac{7}{4}$

Ecuaciones de las mediatrices.

Mediatriz A_MC: su pendiente es recíproca y de signo contrario a la pendiente del lado BC, o sea $m=\frac{3}{10}$ y pasa por el punto $A_M\left(\frac{11}{2},2\right)$, aplicando la expresión $y-y_1=m(x-x_1)$ de la sección 6.3 b) se tiene: $y-2=\frac{3}{10}\left(x-\frac{11}{2}\right)$; $y=\frac{3}{10}x-\frac{33}{20}+\frac{40}{20}$

$$\boxed{y=\frac{3}{10}x+\frac{7}{20}}$$

Mediatriz B_MC: $m=-\frac{4}{7}$, $B_M\left(2,\frac{7}{2}\right)$

$y-\frac{7}{2}=-\frac{4}{7}(x-2)$; $y=-\frac{4}{7}x+\frac{8}{7}+\frac{7}{2}$

$$\boxed{y=-\frac{4}{7}x+\frac{65}{14}}$$

Mediatriz C_MC: $m=\frac{7}{3}$, $C_M\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$

$y+\frac{3}{2}=\frac{7}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)$; $y=\frac{7}{3}x-\frac{49}{6}-\frac{3}{2}$

$$\boxed{y=\frac{7}{3}x-\frac{29}{3}}$$

Coordenadas del punto de intersección "C" de las 3 mediatrices.

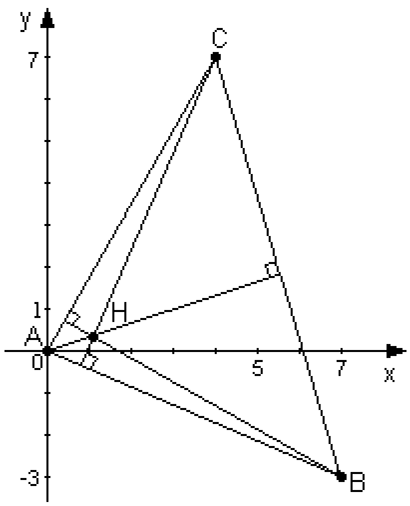
Sean A_MC: $y=\frac{3}{10}x+\frac{7}{20}$; C_MC: $y=\frac{7}{3}x-\frac{29}{3}$

Por el método de igualación $\frac{3}{10}x+\frac{7}{20}=\frac{7}{3}x-\frac{29}{3}$; $\frac{3}{10}x-\frac{7}{3}x=-\frac{29}{3}-\frac{7}{20}$; $\frac{9x-70x}{30}=\frac{-580-21}{60}$

$18x-140x=-601$; $x=\frac{-601}{-122}=\frac{601}{122}$; $y=\frac{7}{3}\left(\frac{610}{122}\right)-\frac{29}{3}$; $y=\frac{223}{122}$ $\therefore \boxed{C\left(\frac{601}{122},\frac{223}{122}\right)}$

3) Las ecuaciones de las alturas y las coordenadas de su punto de intersección “H”, haga un dibujo del problema.

Solución



Ecuaciones de las alturas.

Altura AH: es perpendicular al lado BC, su pendiente es $m=\frac{3}{10}$ y pasa por el punto $A(0,0)$, si $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-0=\frac{3}{10}(x-0)$; $\boxed{y=\frac{3}{10}x}$

Altura BH: $m=-\frac{4}{7}$, $B(7,-3)$; $y+3=-\frac{4}{7}(x-7)$

$y=-\frac{4}{7}x+4-3$; $\boxed{y=-\frac{4}{7}x+1}$

Altura CH: $m=\frac{7}{3}$, $C(4,7)$; $y-7=\frac{7}{3}(x-4)$; $y=\frac{7}{3}x-\frac{28}{3}+7$; $\boxed{y=\frac{7}{3}x-\frac{7}{3}}$

Coordenadas del punto de intersección “H” de las 3 alturas.

Sean AH: $y=\frac{3}{10}x$; BH: $y=-\frac{4}{7}x+1$

Por el método de igualación: $\frac{3}{10}x=-\frac{4}{7}x+1$; $\frac{3}{10}x+\frac{4}{7}x=1$; $21x+40x=70$; $61x=70$; $x=\frac{70}{61}$

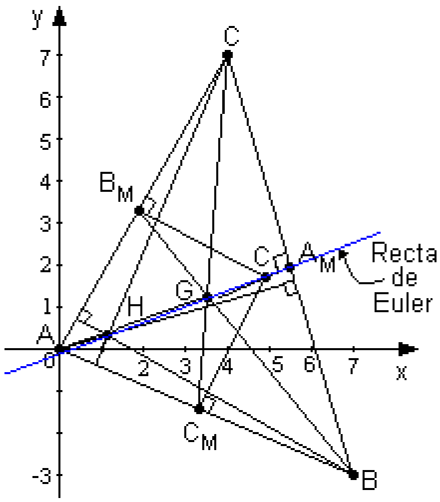
Sustituyendo en $y=\frac{3}{10}\left(\frac{70}{61}\right)=\frac{21}{60}$ $\therefore \boxed{H\left(\frac{70}{61},\frac{21}{61}\right)}$

4) Obtenga la ecuación de Euler.

Solución

Ecuación de Euler.

Sean las coordenadas de $G\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{601}{122},\frac{223}{122}\right)$ y $H\left(\frac{70}{61},\frac{21}{61}\right)$; si la pendiente de la recta que pasa por los puntos H y G es la misma que la que pasa por los puntos H y C, entonces los 3 puntos G,H y C están sobre la misma recta:



$$m_{HG}=\frac{y_G-y_H}{x_G-x_H}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{21}{61}}{\frac{11}{3}-\frac{70}{61}}=\frac{181}{461}$$

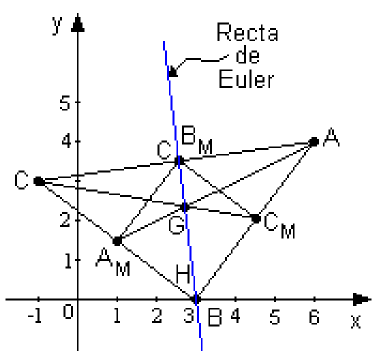
$$m_{HC}=\frac{y_C-y_H}{x_C-x_H}=\frac{\frac{223}{122}-\frac{21}{61}}{\frac{601}{122}-\frac{70}{61}}=\frac{181}{461}$$

Eligiendo cualquiera de los 3 puntos, por ejemplo $G\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$ y como $m_{HC}=\frac{181}{461}$ se tiene

$$y-\frac{4}{3}=\frac{181}{461}\left(x-\frac{11}{3}\right)\ ;\ y=\frac{181}{461}x-\frac{181}{461}\left(\frac{11}{3}\right)+\frac{4}{3}\ ;\ \boxed{y=\frac{181}{461}x-\frac{49}{461}}$$

5) Los vértices de un triángulo son $A(6,4)$, $B(3,0)$ y $C(-1,3)$, obtener las ecuaciones de las medianas, las mediatrices, las alturas y las coordenadas de los puntos G,C y H, así como la ecuación de Euler y hacer un dibujo del problema.

Solución



Coordenadas de los puntos medios de cada lado:

$$A_M\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(1,\frac{3}{2}\right)$$

$$B_M\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$$

$$C_M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},2\right)$$

Pendiente de cada lado del triángulo:

Lado AB: $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{0-4}{3-6}=\dfrac{4}{3}$; Lado BC: $m=\dfrac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\dfrac{3-0}{-1-3}=-\dfrac{3}{4}$

Lado CA: $m=\dfrac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\dfrac{4-3}{6+1}=\dfrac{1}{7}$

Ecuaciones de las medianas:

Mediana AA_M: $\dfrac{x-6}{1-6}=\dfrac{y-4}{\frac{3}{2}-4}$; $\dfrac{x-6}{-5}=\dfrac{2y-8}{-5}$; $\boxed{x-2y+2=0}$

Mediana BB_M: $\dfrac{x-3}{\frac{5}{2}-3}=\dfrac{y-0}{\frac{7}{2}-0}$; $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{7}$; $\boxed{7x+y-21=0}$

Mediana CC_M: $\dfrac{x+1}{\frac{9}{2}+1}=\dfrac{y-3}{2-3}$; $\dfrac{2x+2}{11}=\dfrac{y-3}{-1}$; $\boxed{2x+11y-31=0}$

Coordenadas del centro de gravedad "G".

Sean AA_M: $x-2y+2=0$; BB_M: $7x+y-21=0$

de AA_M, $x=2y-2$; sustituyendo en BB_M se tiene: $7(2y-2)+y-21=0$; $14y-14+y-21=0$

$y=\dfrac{7}{3}$ sustituyendo en $x=2\left(\dfrac{7}{3}\right)-2$; $x=\dfrac{8}{3}$ $\therefore \boxed{G\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{7}{3}\right)}$

Ecuaciones de las mediatrices.

Mediatriz A_MC: $m=\dfrac{4}{3}$ y pasa por $A_M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

$y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{3}(x-1)$; $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{2}$; $\boxed{y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{6}}$

Mediatriz B_MC: $m=-7$ y pasa por $B_M\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}\right)$

$y-\dfrac{7}{2}=-7\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$; $y=-7x+\dfrac{35}{2}+\dfrac{7}{2}$; $\boxed{y=-7x+21}$

Mediatriz C_MC: $m=-\dfrac{3}{4}$ y pasa por $C_M\left(\dfrac{9}{2},2\right)$

$y-2=-\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{9}{2}\right)$; $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{27}{8}+\dfrac{16}{8}$; $\boxed{y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{43}{8}}$

Coordenadas del circuncentro "C":

Sean: $A_M C:\ y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}$; $B_M C:\ y=-7x+21$

Por igualación $\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}=-7x+21$; $\frac{4}{3}x+7x=21-\frac{1}{6}$; $\frac{25}{3}x=\frac{125}{6}$; $x=\frac{5}{2}$; sustituyendo en $y=-7\left(\frac{5}{2}\right)+21$; $y=\frac{-35+42}{2}=\frac{7}{2}$ $\therefore$ $\boxed{C\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)}$

Ecuaciones de las alturas.

Altura AH: $m=\frac{4}{3}$ y pasa por $A(6,4)$

$$y-4=\frac{4}{3}(x-6)\ ;\ y=\frac{4}{3}x-8+4\ ,\ \boxed{y=\frac{4}{3}x-4}$$

Altura BH: $m=-7$ y pasa por $B(3,0)$

$$y-0=-7(x-3)\ ;\ \boxed{y=-7x+21}$$

Altura CH: $m=-\frac{3}{4}$ y pasa por $A(-1,3)$

$$y-3=-\frac{3}{4}(x+1)\ ;\ y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}+3\ ,\ \boxed{y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}}$$

Coordenadas del ortocentro "H".

Sean AH: $y=\frac{4}{3}x-4$; BH: $y=-7x+21$

Por el método de igualación $\frac{4}{3}x-4=-7x+21$; $\frac{4}{3}x+7x=21+4$; $\frac{25}{3}x=25$; $x=3$ sustituyendo en $y=-7(3)+21$; $y=0$ $\therefore$ $\boxed{H(3,0)}$

Ecuación de Euler.

Sean $G\left(\frac{8}{3},\frac{7}{3}\right)$, $C\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ y $H(3,0)$

$$m_{GC}=\frac{y_C-y_G}{x_C-x_G}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{7}{3}}{\frac{5}{2}-\frac{8}{3}}=-7\quad ;\quad m_{GH}=\frac{y_H-y_G}{x_H-x_G}=\frac{0-\frac{7}{3}}{3-\frac{8}{3}}=-7$$

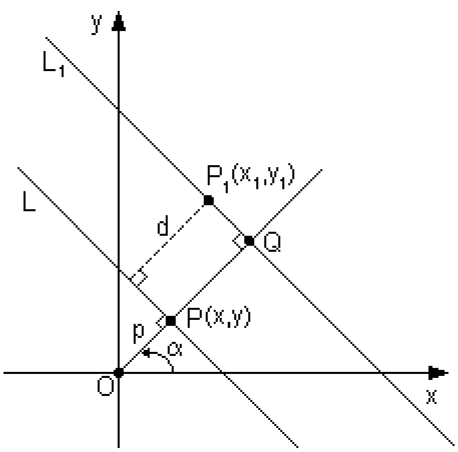
Con $H(3,0)$ y $m=-7$; $y-0=-7(x-3)$; $\boxed{y=-7x+21}$

EJERCICIOS

Los vértices de un triángulo son $A(-3,-3)$, $B(3,3)$ y $C(-4,4)$ se pide:

1) Las ecuaciones de las medianas, las coordenadas de "G".
2) Las ecuaciones de las mediatrices, las coordenadas de "C".
3) Las ecuaciones de las alturas, las coordenadas de "H".
4) La ecuación de Euler.
5) Con los puntos $A(-1,0)$, $B(3,0)$ y $C(1,2\sqrt{3})$ como vértices de un triángulo, se pide las ecuaciones de las medianas, las mediatrices, las alturas, las coordenadas de los puntos G,C y H, la ecuación de Euler y hacer un dibujo del problema.

6.6. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA



Este problema consiste en obtener una fórmula que nos permita calcular la distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta "L" (llamemos con la letra "d" esta distancia).

Una forma de resolver este problema es la siguiente: hagamos pasar por el punto $P_1(x_1, y_1)$ una recta "L_1" paralela a la recta "L" y recordando que la forma normal de la ecuación de la recta "L" es $x\cos\alpha + ysen\alpha - p = 0$ •••(1), apoyándonos con la figura, observamos que la magnitud $OQ = p + d$ y puede considerarse como una nueva "p" para la recta "L_1", con el mismo ángulo "α" y que su forma normal es: $x_1\cos\alpha + y_1 sen\alpha - (p + d) = 0$, despejando la "$d$" se tiene $d = x_1\cos\alpha + y_1 sen\alpha - p$, que es la distancia dirigida de P_1 a L y que como se observa, se obtiene con solo sustituir las coordenadas del punto $P_1(x_1, y_1)$ en la ecuación (1). Esta distancia "d" será positiva si la recta "L" se localiza entre el punto $P_1(x_1, y_1)$ y el origen de coordenadas y será negativa si el punto $P_1(x_1, y_1)$ y el origen de coordenadas se localiza de un mismo lado de la recta "L".

Como generalmente la ecuación de la recta "L" se da en forma general $Ax + By + C = 0$, es necesario convertirla a la forma normal (ver 6.4 d)), quedando la distancia "d" como sigue:

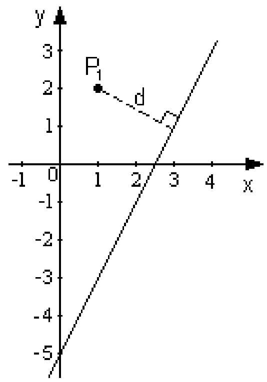
$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sustituyendo las coordenadas del punto $P_1(x_1, y_1)$ y eligiendo el signo del radical contrario al de "C".

EJEMPLOS

1) Obtener la distancia del punto $P_1(1,2)$ a la recta $y=2x-5$.

Solución



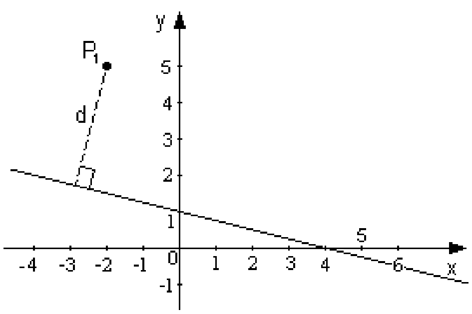
Pasando la recta $y=2x-5$ a la forma general $2x-y-5=0$, sustituimos las coordenadas del punto $P_1(1,2)$ en la expresión:

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{2x-y-5}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\frac{2(1)-(2)-5}{\sqrt{5}}=-\frac{5}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$$

$d=-\sqrt{5}$, el signo negativo es porque el punto P_1 y el origen se localizan del mismo lado de la recta.

2) Hallar la distancia del punto $P_1(-2,5)$ a la recta $\frac{x}{4}+\frac{y}{1}=1$.

Solución



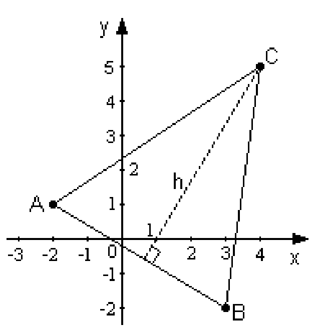
Pasando a la forma general la ecuación de la recta $\frac{x}{4}+\frac{y}{1}=1$, $x+4y-4=0$ y sustituyendo $P_1(-2,5)$ en:

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{x+4y-4}{\sqrt{(1)^2+(4)^2}}=\frac{(-2)+4(5)-4}{\sqrt{17}}=\frac{14}{\sqrt{17}}$$

$d=\frac{14}{\sqrt{17}}$, el signo positivo es porque P_1 y el origen se localizan en ambos lados de la recta.

3) Los vértices de un triángulo $A(-2,1)$, $B(3,-2)$ y $C(4,5)$, hallar la magnitud de la altura "h" del vértice "C" sobre el lado AB.

Solución



Obtenemos la ecuación en forma general del lado AB:

$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{1+2}{-2-3}=-\frac{3}{5}$ y con el punto $A(-2,1)$ se tiene:

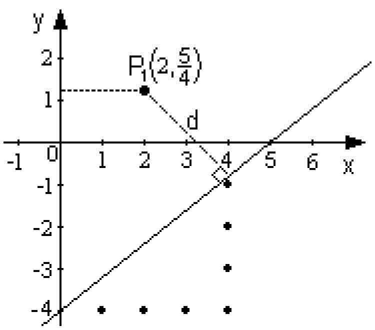
$y-1=-\frac{3}{5}(x+2)$; $5y-5=-3x-6$; $3x+5y+1=0$, sustituyendo las coordenadas del punto $C(4,5)$ en la expresión:

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{3x+5y+1}{-\sqrt{(3)^2+(5)^2}}=\frac{3(4)+5(5)+1}{-\sqrt{34}}=-\frac{38}{\sqrt{34}}$$

como $d = h$; $h = \left| -\frac{38}{\sqrt{34}} \right| = \frac{38}{\sqrt{34}} \approx 6.5$

4) La distancia "d" del punto $P_1(2,k)$ a la recta $L_1 : 3x - 4y - 16 = 0$ es -3, hallar el valor de "k".

<u>Solución</u>



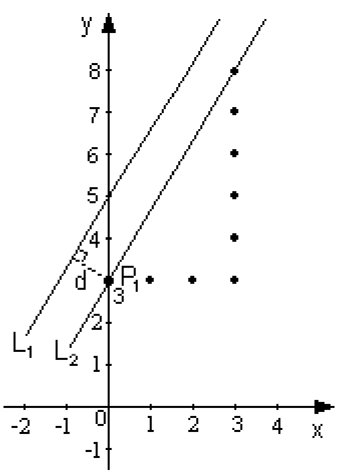
Sustituyendo valores en la expresión $d = \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$

$-3 = \dfrac{3(2) - 4(k) - 16}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$ despejando "k" ; $k = \dfrac{6 - 16 + 15}{4} = \dfrac{5}{4}$

entonces $P_1\left(2, \frac{5}{4}\right)$. El signo -3 indica que el punto P_1 y el origen se localizan del mismo lado respecto a la recta L_1.

5) Hallar la distancia "d" entre las rectas paralelas $L_1 : 5x - 3y + 15 = 0$ y $L_2 : 5x - 3y + 9 = 0$.

<u>Solución</u>



Una forma puede ser la siguiente:
Obtenemos un punto arbitrario de la recta L_2: sea $x = 0$; $5(0) - 3y + 9 = 0$; $y = \frac{9}{3} = 3$ lo llamamos $P_1(0,3)$ y sustituimos sus coordenadas en la expresión:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{5x - 3y + 15}{-\sqrt{(5)^2 + (-3)^2}} = \frac{5(0) - 3(3) + 15}{-\sqrt{34}} = -\frac{6}{\sqrt{34}}$$

$$d = -\frac{6}{\sqrt{34}} \approx -1.03$$

EJERCICIOS

1) Hallar la distancia del punto $P_1(4,1)$ a la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$.

2) Hallar la distancia del punto $P_1(3,5)$ a la recta $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$.

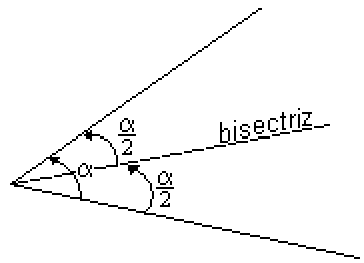
3) Hallar la distancia del punto $P_1(-2,1)$ a la recta $\frac{1}{2}x + 2y + 4 = 0$.

4) Hallar la distancia "d" entre las rectas paralelas $L_1 : 2x - y + 3 = 0$ y $L_2 : 4x - 2y - 2 = 0$.

6) Hallar la ecuación de la recta paralela a la recta $L_1 : 3x - 4y - 6 = 0$ con $d = 2$ (positiva).

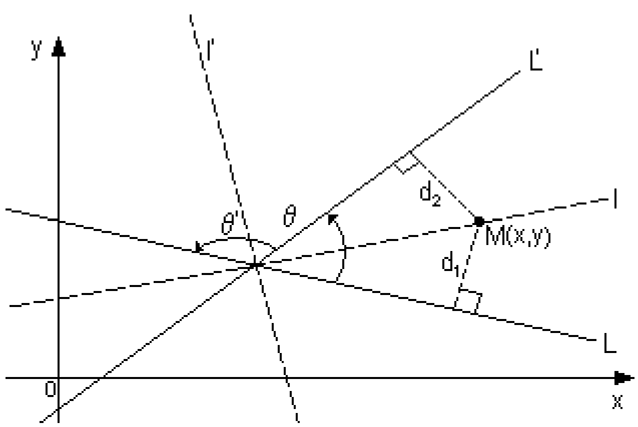
6.7. ECUACIÓN DE LAS BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO Y SU PUNTO DE INTERSECCIÓN “I” (INCENTRO)

Como una aplicación más de la forma normal de la ecuación de una recta, se muestra cómo puede obtenerse la ecuación de una bisectriz. Por geometría elemental, se puede decir que una bisectriz es la recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales:



Por definición se tiene que: <u>“La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los lados del ángulo”.</u>

Consideremos dos rectas:



$(L)\ldots\ Ax+By+C=0$ y
$(L')\ldots\ A'x+B'y+C'=0$
que se cruzan en un punto formando dos ángulos suplementarios θ y $\theta'=180^0-\theta$, suponemos que las rectas “l” y “l'” son las bisectrices de θ y θ' respectivamente, consideremos un punto cualquiera $M(x,y)$ sobre la bisectriz “l” y según la definición, la distancia del punto M a la recta L (d_1) debe ser igual a la distancia de M a L' (d_2), o sea que $d_1=d_2$, <u>aplicando el concepto de distancia de un punto a una recta</u>, se tiene que:

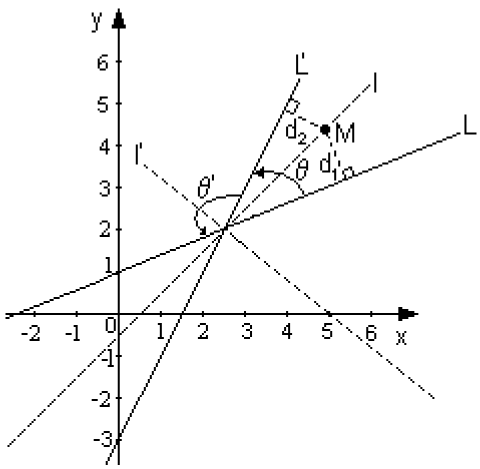
$$d_1=\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A'x+B'y+C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}=d_2 \quad \bullet\bullet\bullet(1)$$

Esta última expresión, proporciona la ecuación de la bisectriz “l” del ángulo θ y para obtener la bisectriz del ángulo suplementario θ', simplemente se cambia el signo de uno cualquiera de los dos miembros de la expresión (1) y se debe cumplir que <u>“las bisectrices de los ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares entre sí”.</u>

EJEMPLOS

1) Obtener las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por las rectas $(L)\ldots\ x-2y+2=0$ y $(L')\ldots\ 2x-y-3=0$

Solución



Suponemos un punto "M" cualquiera sobre la bisectriz "l", entonces las distancias de M a L (d_1) y la de M a L' (d_2) son:

$$d_1 = \frac{x-2y+2}{-\sqrt{(1)^2+(-2)^2}} = \frac{x-2y+2}{-\sqrt{5}}$$

$$d_2 = \frac{2x-y-3}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}} = \frac{2x-y-3}{\sqrt{5}}$$

En las dos distancias d_1 y d_2, el punto M y el origen de coordenadas se localizan en ambos lados respecto a cada recta L y L', por lo tanto son de signo positivo y como $d_1 = d_2$ se tiene:

$(a)\ldots\ \frac{x-2y+2}{-\sqrt{5}} = \frac{2x-y-3}{\sqrt{5}}$ simplificando y ordenando: $-x+2y-2=2x-y-3$

$\boxed{3x-3y-1=0}$ es la ecuación de la bisectriz "l".

Para obtener la bisectriz l', cambiamos el signo a uno de los dos miembros de la expresión (a):

Sea $-\left(\frac{x-2y+2}{-\sqrt{5}}\right) = \frac{2x-y-3}{\sqrt{5}}$ y simplificando se tiene:

$\boxed{x+y-5=0}$ es la ecuación de la bisectriz l'.

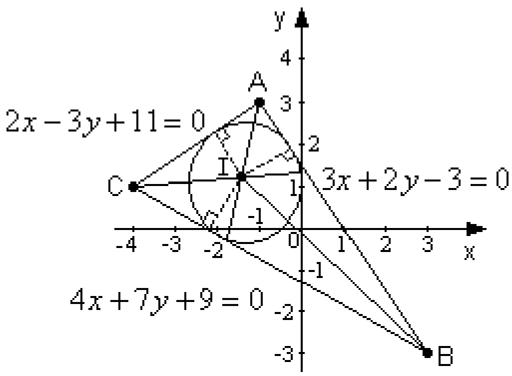
despejando de la bisectriz "l" a: $y = x-\frac{1}{3}$ y de la bisectriz l' $y=-x+5$, se observa que las pendientes son recíprocas y de signo contrario: $m_l = 1$; $m_{l'} = -1$, por lo tanto sí son dos rectas perpendiculares entre sí.

Los vértices de un triángulo son $A(-1,3)$, $B(3,-3)$ y $C(-4,1)$, se pide:

2) Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores.
3) Las coordenadas del incentro (I).
4) Demuestre que el incentro equidista de los tres lados del triángulo.

Solución

Las ecuaciones de los lados del triángulo son:



Lado AB: $\dfrac{x+1}{3+1}=\dfrac{y-3}{-3-3}$; $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{-6}$; $-6x-6=4y-12$

$$6x+4y-6=0\ ;\ \boxed{3x+2y-3=0}$$

Lado BC: $\dfrac{x-3}{-4-3}=\dfrac{y+3}{1+3}$; $\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y+3}{4}$; $4x-12=-7y-21$

$$\boxed{4x+7y+9=0}$$

Lado CA: $\dfrac{x+4}{-1+4}=\dfrac{y-1}{3-1}$; $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-1}{2}$; $2x+8=3y-3$

$$\boxed{2x-3y+11=0}$$

2) Ecuaciones de las bisectrices:

Del ángulo en A: $\dfrac{3x+2y-3}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}}=\dfrac{2x-3y+11}{-\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}$; $\dfrac{3x+2y-3}{\sqrt{13}}=\dfrac{2x-3y+11}{-\sqrt{13}}$

$-(3x+2y-3)=2x-3y+11$; $\boxed{5x-y+8=0}$

Del ángulo en B: $\dfrac{3x+2y-3}{\sqrt{13}}=\dfrac{4x+7y+9}{-\sqrt{65}}$; $-\sqrt{5}(3x+2y-3)=4x+7y+9$

$$\boxed{\left(4+3\sqrt{5}\right)x+\left(7+2\sqrt{5}\right)y-3\sqrt{5}+9=0}$$

Del ángulo en C: $\dfrac{2x-3y+11}{-\sqrt{13}}=\dfrac{4x+7y+9}{-\sqrt{65}}$; $\sqrt{5}(2x-3y+11)=4x+7y+9$

$$\boxed{\left(2\sqrt{5}-4\right)x+\left(3\sqrt{5}+7\right)y+11\sqrt{5}-9=0}$$

3) Coordenadas del incentro (I)

Resolviendo como un sistema de ecuaciones a 2 cualesquiera de las bisectrices, sean:

$$5x-y+8=0$$
$$\left(4+3\sqrt{5}\right)x+\left(7+2\sqrt{5}\right)y-3\sqrt{5}+9=0$$

despejando de la primera $y=5x+8$ y sustituyendo en la segunda:

$$\left(4+3\sqrt{5}\right)x+\left(7+2\sqrt{5}\right)(5x+8)-3\sqrt{5}+9=0\ ;\ 4x+3\sqrt{5}x+35x+56+10\sqrt{5}x+16\sqrt{5}-3\sqrt{5}+9=0$$

$\left(13\sqrt{5}+39\right)x=-13\sqrt{5}-65$; $x=\dfrac{-13\sqrt{5}-65}{13\sqrt{5}+39}\approx -1.4$

sustituyendo este valor en $y=5\left(\dfrac{-13\sqrt{5}-65}{13\sqrt{5}+39}\right)+8\approx 1.1$

$$\approx I(-1.4,1.1)$$

4) ¿El incentro equidista de los 3 lados del triángulo?

Calculando la distancia del punto $I(-1.4,1.1)$ a cada uno de los lados del triángulo se tiene:

Con el lado AB: $\dfrac{3x+2y-3}{\sqrt{12}}=\dfrac{3(-1.4)+2(1.1)-3}{\sqrt{12}}\approx 1.4$

Con el lado BC: $\dfrac{4x+7y+9}{-\sqrt{65}}=\dfrac{4(-1.4)+7(1.1)+9}{-\sqrt{65}}\approx 1.4$

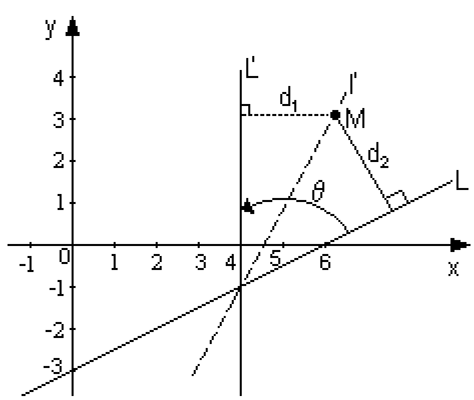
Con el lado CA: $\dfrac{2x-3y+11}{-\sqrt{13}}=\dfrac{2(-1.4)-3(1.1)+11}{-\sqrt{13}}\approx 1.4$

Por lo tanto, el punto $I(-1.4,1.1)$ equidista de los 3 lados del triángulo y es el centro del círculo inscrito al triángulo.

5) Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo θ formado por las rectas

$(L)\ldots\ x-2y-6=0$ y $(L')\ldots\ x-4=0$.

Solución



Suponiendo que el punto M se localiza sobre la bisectriz del ángulo agudo θ, se observa que el punto "M" y el origen "O" están del mismo lado de la recta L y el punto "M" y el origen "O" se localizan en ambos lados de la recta L' por lo que d_1 es positivo y d_2 negativo como sigue:

$\dfrac{x-2y-6}{\sqrt{5}}=-\left(\dfrac{x-4}{\sqrt{1}}\right)$; $x-2y-6=-\sqrt{5}(x-4)$

$x-2y-6=-\sqrt{5}x+4\sqrt{5}$

$\boxed{\left(1+\sqrt{5}\right)x-2y-\left(6+4\sqrt{5}\right)=0}$ es la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo θ.

EJERCICIOS

1) Obtener las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por las rectas que unen los puntos $A(0,4)$, $B(4,0)$ y $C(0,7)$, $D(1,0)$.

2) Obtener la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo θ formado por las rectas $(L_1)\ldots\ \frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$ y $(L_2)\ldots\ y=7x+7$.

3) La recta (L_1) pasa por el punto $A(1,-1)$ y tiene pendiente $m_1=\frac{3}{4}$ y la recta (L_2) pasa por el punto $B(-1,-6)$ y tiene pendiente $m_2=\frac{4}{3}$, se cruzan formando un ángulo agudo θ, hallar la ecuación de su bisectriz.

Los vértices de un triángulo son $A\left(\frac{5}{2},-\frac{15}{2}\right)$, $B(5,0)$ y $C\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, se pide:

4) Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores.

5) Hallar las coordenadas del incentro (I).

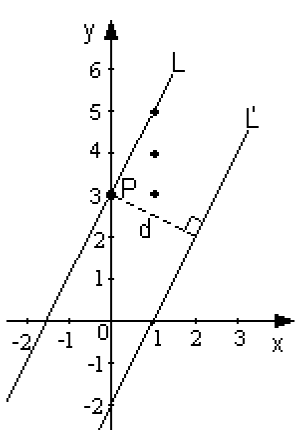
6.8. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Para resolver este problema, proponemos 2 formas de hacerlo:

1ª Forma. Aplicando la forma normal de la recta , suponemos dos rectas $(L)\ldots$ $x\cos\alpha+y\,sen\,\alpha-p=0$ y $(L')\ldots\ x\cos\alpha+y\,sen\,\alpha-p'=0$ paralelas entre sí, donde p y p' son las distancias del origen a cada recta y la distancia "d" entre las dos rectas es $d=|p-p'|$ si el origen de coordenadas se localiza del mismo lado de las rectas y $d=p+p'$, si el origen se localiza entre las dos rectas.

2ª Forma. Se obtiene un punto $P_1(x_1,y_1)$ cualquiera sobre alguna de las dos rectas y se calcula la distancia de éste punto a la otra recta y esta será la distancia entre las dos rectas.

EJEMPLOS



En cada inciso, se pide calcular la distancia entre las dos rectas paralelas que se dan.

1) $(L)\ldots\ 2x-y+3=0$; $(L')\ldots\ 6x-3y-6=0$

Solución

1ª Forma.

Recordar que cuando la recta se da en la forma general, $p=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$. En estos problemas, el signo del radical se toma de tal manera que "p" sea positivo, por lo tanto: con la recta L, $p=\dfrac{3}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ y con la recta L', $p'=\dfrac{-6}{-\sqrt{(6)^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{45}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y como el origen se localiza entre las dos rectas, $d=p+p'=\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}$; $\boxed{d=\dfrac{5}{\sqrt{5}}\approx 2.24}$

2ª Forma.

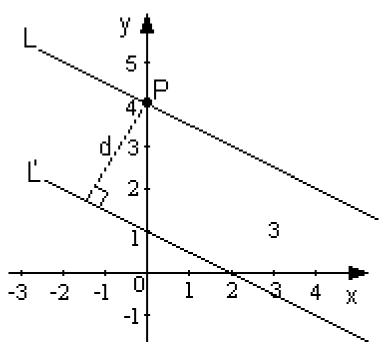
Si en la recta L hacemos $x=0$; $y=3$, $P(0,3)$ y calculando la distancia de P a la recta L' se tiene:

$$d=-\left(\frac{6x-3y-6}{\sqrt{(6)^2+(-3)^2}}\right)=\frac{-6(0)+3(3)+6}{\sqrt{45}}=\frac{15}{\sqrt{45}}=\frac{3(5)}{3(\sqrt{5})}=\frac{5}{\sqrt{5}}$$

Recordar que el signo negativo se debe a que el punto P y el origen están del mismo lado respecto a la recta L'.

2) $(L)\ldots\ x+2y-8=0$; $(L')\ldots\ x+2y-2=0$

Solución



1ª Forma.

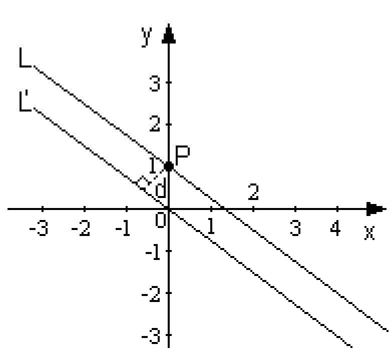
Con (L): $p=\dfrac{-8}{-\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

Con (L'): $p'=\dfrac{-2}{-\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, como el origen de coordenadas se localiza del mismo lado respecto a las 2 rectas, $d=\left|p-p'\right|=\left|\dfrac{8}{\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{5}}\approx 2.7$

2ª Forma.

Si en L hacemos $x=0 \Rightarrow y=4$; $P(0,4)$ y la distancia de P a L' es:

$$d=\frac{x+2y-2}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\frac{0+2(4)-2}{\sqrt{5}}\ ;\ \boxed{d=\frac{6}{\sqrt{5}}}$$



3) $(L)\ldots\ 3x+4y-4=0$; $(L')\ldots\ 3x+4y=0$

Solución

1ª Forma.

Con (L): $p = \dfrac{-4}{-\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$

Con (L'): $p' = \dfrac{0}{\sqrt{25}} = 0$, $d = p + p' = \dfrac{4}{5} + 0 = \dfrac{4}{5}$

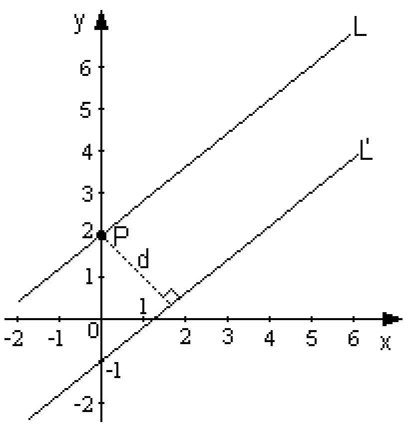
2ª Forma.

Si en L hacemos $x = 0 \Rightarrow y = 1$; $P(0,1)$ entonces la distancia de P a L' es:

$$d = \frac{3x + 4y}{\sqrt{25}} = \frac{3(0) + 4(1)}{5} \;\; ; \;\; \boxed{d = \frac{4}{5}}$$

4) $(L) \ldots\; 4x - 5y + 10 = 0$; $(L') \ldots\; 4x - 5y - 5 = 0$

<u>Solución</u>



1ª Forma.

Con (L): $p = \dfrac{10}{\sqrt{(4)^2 + (-5)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{41}}$

Con (L'): $p' = \dfrac{-5}{-\sqrt{41}} = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$, como el origen se localiza entre las 2 rectas, $d = p + p' = \dfrac{10}{\sqrt{41}} + \dfrac{5}{\sqrt{41}} = \dfrac{15}{\sqrt{41}} \approx 2.3$

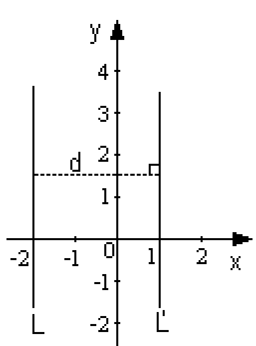
2ª Forma.

Si en L hacemos $x = 0 \Rightarrow y = 2$; $P(0,2)$ y como el origen y el punto están del mismo lado respecto a L',

$$d = -\left(\frac{4(0) - 5(2) - 5}{\sqrt{41}}\right) = \frac{10 + 5}{\sqrt{41}} \;\; ; \;\; \boxed{d = \frac{15}{\sqrt{41}} \approx 2.3}$$

5) $(L) \ldots\; 3x + 6 = 0$; $(L') \ldots\; 3x - 3 = 0$

<u>Solución</u>



Con (L): $p = \dfrac{6}{\sqrt{(3)^2 + (0)^2}} = \dfrac{6}{3} = 2$

Con (L'): $p' = \dfrac{-3}{-\sqrt{9}} = \dfrac{3}{3} = 1$

$d = p + p' = 2 + 1$; $\boxed{d = 3}$

EJERCICIOS

En cada inciso, hallar la distancia entre las dos rectas paralelas que se dan:

1) $(L)\ldots\ x - y + 5 = 0$; $(L')\ldots\ x - y + 2 = 0$

2) $(L)\ldots\ x - 3y - 3 = 0$; $(L')\ldots\ x - 3y + 6 = 0$

3) $(L)\ldots\ 3x + y - 3 = 0$; $(L')\ldots\ 3x + y - 1 = 0$

4) $(L)\ldots\ 2x - 5y + 7 = 0$; $(L')\ldots\ 2x - 5y = 0$

5) $(L)\ldots\ 2y - 6 = 0$; $(L')\ldots\ 2y - 2 = 0$

VII. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

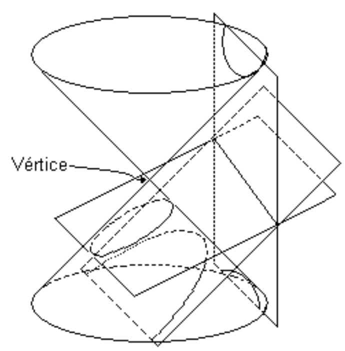
Objetivos: Que el alumno:

1. Comprenderá que cualquier curva definida por una ecuación de segundo grado, representa una cónica no degenerada.
2. Manipulando los coeficientes A, B, y C de la ecuación general de segundo grado, sabrá el tipo de cónica de que se trata.
3. Usando el concepto de excentricidad de una cónica, sea capaz de determinar su ecuación.
4. Dada la ecuación de una cónica, determinará cuando con una traslación o una rotación la representará de una forma más simple.

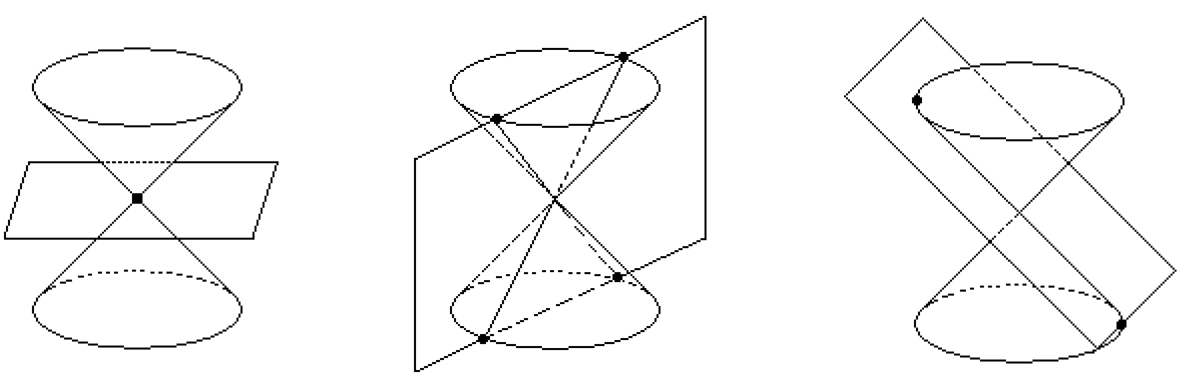
7.1. SECCIONES CÓNICAS

Cuando un plano corta a un cono circular recto de dos mantos, la sección que resulta de dicho corte determina ciertas curvas llamadas CÓNICAS.

- Si el plano que corta no pasa por el vértice del cono, la sección que resulta es una elipse (o una circunferencia), una parábola o una hipérbola y reciben el nombre de cónicas regulares.



- Si el plano que corta pasa por el vértice del cono, la sección resultante puede consistir en un punto, dos rectas que se cortan, dos rectas coincidentes o una curva imaginaria y reciben el nombre de cónicas degeneradas.



7.2. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO (EN DOS VARIABLES)

En la sección 6.2 se mencionó que una ecuación algebraica de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se llama ecuación general de segundo grado, donde los coeficientes A, B y C no sean simultáneamente cero. Esta ecuación se toma generalmente como la definición analítica de CÓNICA.

7.3. CRITERIOS PARA IDENTIFICAR A LA CÓNICA QUE REPRESENTA UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

a) Si en la ecuación general de segundo grado, el coeficiente $B = 0$ la ecuación resultante $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa un lugar geométrico que siempre es una cónica (si no es degenerada):

- Si $A = 0$ ó $C = 0$ será una parábola.
- Si A y C tienen el mismo signo será una elipse.
- Si $A = C$ será una circunferencia.
- Si A y C son de signos contrarios será una hipérbola.
- D y E indican que el centro de la cónica (cuando lo hay), está fuera del origen de coordenadas, sí $D = 0$ el centro está sobre el eje "y", si $E = 0$ está sobre el eje "x".
- F (término independiente) indica que la cónica no pasa por el origen, si $F = 0$ sí pasa por el origen.
- Los ejes de estas cónicas serán paralelos a los ejes coordenados x, y.

b) En la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, los coeficientes de los términos de segundo grado A, B y C nos permiten identificar que tipo de cónica se tiene (también en el caso degenerado) procediendo a analizar el discriminante (o invariante) $B^2 - 4AC$ como sigue:

- Si $B^2 - 4AC = 0$, se trata de una parábola (o como caso degenerado un par de rectas paralelas o coincidentes).
- Si $B^2 - 4AC < 0$, se trata de una elipse (o como caso degenerado un punto).
- Si $B^2 - 4AC > 0$, se trata de una hipérbola (o como caso degenerado un par de rectas que se cortan).
- De la misma manera que en el inciso a), los coeficientes D y E indican que el centro de la curva (si lo hay) está fuera del origen, si $D = 0$ el centro está sobre el eje "y", si $E = 0$, estará sobre el eje "x".
- El término independiente F indica que la curva no pasa por el origen, si $F = 0$, la curva si pasa por el origen.
- Los ejes de estas cónicas son oblícuos respecto a los ejes x, y.

EJEMPLOS

Determinar el tipo de cónica que representa cada ecuación:

1) $9x^2+25y^2-6x-25y-19=0$

Solución

Como en la ecuación dada no se tiene el término en (xy), o sea que $B=0$, se aplica el criterio del inciso a)

- Como $A=9$ y $C=25$ (son del mismo signo), la cónica es una ELIPSE.
- Sus ejes son paralelos a los ejes coordenados x, y.
- Los coeficientes $D=-6$ y $E=-25$ indican que el centro de la elipse se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F=-19$ indica que la elipse no pasa por el origen.

2) $16x^2-9y^2-32x-9y+100=0$

Solución

- Como $B=0$, $A=16$ y $C=-9$ (son de signos contrarios) la cónica representa una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes son paralelos a los ejes coordenados x, y.
- Como $D=-32$ y $E=-9$ indican que el centro de la hipérbola se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F=100$ indica que la hipérbola no pasa por el origen.

3) $2x^2+2y^2-20x-28y-302=0$

Solución

- Como $B=0$, $A=C=2$ (son iguales), la cónica representa una CIRCUNFERENCIA.
- $D=-20$ y $E=-28$ indica que el centro de la circunferencia se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F=-302$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

4) $2y^2-x-12y+7=0$

Solución

- Como $B=0$, $A=0$ y $C=2$ esto indica que la cónica es una PARÁBOLA.
- Su eje es paralelo al eje de las "x".
- Como $D=-1$ y $E=-12$, el vértice de la parábola se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F=7$ indica que la parábola no pasa por el origen.

5) $\frac{1}{2}x^2 + x - y + 2 = 0$

Solución

- Como $B = 0$, $A = \frac{1}{2}$ y $C = 0$, la cónica representa una PARÁBOLA.
- Su eje es paralelo al eje de las " y ".
- Como $D = 1$ y $E = -1$ indican que el vértice de la parábola se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F = 2$ indica que la parábola no pasa por el origen.

6) $2x^2 - xy + y^2 - x + 3y - 2 = 0$

Solución

Como la ecuación dada si contiene el término en (xy), o sea que $B = -1$, se aplica el criterio del inciso b).

- Analizando el discriminante $B^2 - 4AC = (-1)^2 - 4(2)(1) = 1 - 8 = -7$ como es negativo, esto indica que la cónica es una ELIPSE.
- Los ejes de la elipse están rotados un ángulo " α " respecto de los ejes coordenados x, y.
- Los coeficientes $D = -1$ y $E = 3$ indican que el centro de la elipse se localiza fuera del origen de coordenadas.
- El término independiente $F = -2$ indica que la elipse no pasa por el origen.

7) $4x^2 + 3xy - 4y^2 - 12x - 18y + 4 = 0$

Solución

- Como $B = 3$, $B^2 - 4AC = (3)^2 - 4(4)(-4) = 9 + 64 = 73$ como es positivo, la cónica es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes están rotados un ángulo " α " respecto de los ejes x, y.
- $D = -12$ y $E = -18$ indican que el centro de la hipérbola se localiza fuera del origen de coordenadas.
- El término independiente $F = 4$ indica que la hipérbola no pasa por el origen.

8) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y = 0$

Solución

- Como $B = -2$, $B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$, esto indica que la cónica es una PARÁBOLA.
- El eje de la parábola tiene una rotación de un ángulo " α " respecto de los ejes coordenados x, y.

- Una parábola no tiene centro y como el término independiente $F=0$, la parábola pasa por el origen de coordenadas x, y.

9) $8x^2+4xy+5y^2+2y-14=0$

Solución

- Si $B=4$, $B^2-4AC=(4)^2-4(8)(5)=16-160=-144$, esto indica que la cónica es una ELIPSE.
- Sus ejes tienen una rotación de un ángulo "α" respecto de los ejes x, y.
- Como $D=0$ y $E=2$, el centro de la elipse se localiza sobre el eje de las "y".
- El término independiente $F=-14$ indica que la elipse no pasa por el origen.

10) $3x^2-4xy+y^2-5x+11=0$

Solución

- Si $B=-4$, $B^2-4AC=(-4)^2-4(3)(1)=16-12=4$, esto indica que la cónica es una HIPÉRBOLA.
- Los ejes de la hipérbola tienen una rotación de un ángulo "α" respecto de los ejes coordenados x, y.
- Como $D=-5$ y $E=0$, el centro de la hipérbola se localiza sobre el eje de las "x".
- El término independiente $F=11$ indica que la hipérbola no pasa por el origen.

EJERCICIOS

En cada uno de los incisos, determinar el tipo de cónica que representa cada ecuación.

1) $2x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2-8x-4y+8=0$

2) $5x^2-2xy+2y^2-2y-71=0$

3) $16x^2-25y^2-400=0$

4) $16x^2-9y^2+96x-72y-144=0$

5) $-3x^2-3y^2+18x+18y-27=0$

6) $3x^2+4xy-6x+8=0$

7) $x^2+y^2-9=0$

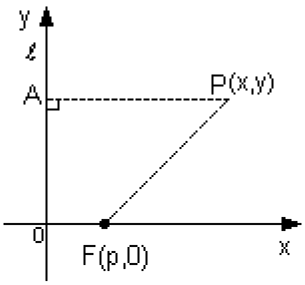
8) $x^2-4xy+2y^2=0$

9) $y^2-9x=0$

10) $3x^2+4xy+y^2-2x-2=0$

7.4. EXCENTRICIDAD

Otra forma que se puede emplear para identificar el tipo de cónica que se tiene, es aplicando el concepto de excentricidad, el cual podemos definir como "El lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve de manera que la relación de la distancia de "P" a un punto fijo "F" llamado foco y la distancia del mismo punto "P" a una recta fija "l" llamada directriz, es una constante no negativa "e" llamada EXCENTRICIDAD de la cónica".



Si tomamos al eje "y" como directriz y al foco sobre el eje "x" como se muestra en la figura, aplicamos la definición anterior: $\frac{PF}{PA} = e$.

Expresándola analíticamente, haciendo operaciones y simplificaciones, se tiene:

$$\frac{PF}{PA} = \frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{x} = e \;\;;\;\; \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = ex \;\;;\;\; (x-p)^2 + y^2 = (ex)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = e^2x^2 \;\;;\;\; x^2 - e^2x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0$$

$$(1-e)^2 x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0 \quad \cdots (1)$$

Se conoce a la ecuación (1) como la ecuación general de las cónicas en función de la excentricidad y en donde:

- Si $e = 0$, la ecuación (1) resulta $x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$ que representa a una CIRCUNFERENCIA que degenera en un punto.
- Si $e = 1$, la ecuación (1) resulta $y^2 - 2px + p^2 = 0$ que representa a una PARÁBOLA.
- Si $e < 1$, $e^2 < 1$, $(1-e^2) > 0$ y haciendo $q = 1 - e^2$ en la ecuación (1) resulta $qx^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$ que representa a una ELIPSE.
- Si $e > 1$, $e^2 > 1$, $(1-e^2) < 0$ y haciendo $-q = 1 - e^2$ en la ecuación (1) resulta $-qx^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$ que representa a una HIPÉRBOLA.

EJEMPLOS

En cada inciso, con la información que se da de una cónica, obtener su ecuación.

1) Sean $F(3,2)$; la directriz: $y = 8$; $e = \frac{2}{3}$

Solución

De acuerdo con la definición $\frac{PF}{PA}=e$, sustituyendo información se tiene: $\frac{PF}{PA}=\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}}{y-8}=\frac{2}{3}$ efectuando operaciones:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\frac{2}{3}(y-8) \;\; ; \;\; (x-3)^2+(y-2)^2=\left[\frac{2}{3}(y-8)\right]^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=\frac{4}{9}\left(y^2-16y+64\right)$$

$$x^2+y^2-\frac{4}{9}y^2-6x-4y+\frac{4(16)}{9}y+13-\frac{4(64)}{9}=0$$

$$x^2+\frac{5}{9}y^2-6x+\frac{28}{9}y-\frac{139}{9}=0$$

$$\boxed{9x^2+5y^2-54x+28y-139=0}$$

Esta ecuación representa una ELIPSE ya que A y C tienen el mismo signo, esto ya lo sabíamos desde el principio pues las elipses tienen excentricidad $e<1$, lo cual se comprobó.

2) Sean $F(2,0)$; la directriz: $x=0$; $e=1$

Solución

Si $\frac{PF}{PA}=e$; $\frac{PF}{PA}=\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}}{x-0}=1$; $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x$; $(x-2)^2+y^2=x^2$

$x^2-4x+4+y^2=x^2$; $\boxed{y^2-4x+4=0}$

Esta ecuación representa una PARÁBOLA horizontal, cosa que ya se sabía antes con el dato de la excentricidad de $e=1$ que corresponde a una parábola.

3) Sean $F(5,2)$; la directriz: $x=-3$; $e=0$

Solución

El dato de la excentricidad $e=0$ sugiere que la cónica es una circunferencia que degenera en un punto.

Si $\frac{PF}{PA}=e$; $\frac{\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}}{x-0}=0$; $\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}=0$; $(x-5)^2+(y-2)^2=0$

$x^2-10x+25+y^2-4y+4=0$; $\boxed{x^2+y^2-10x-4y+29=0}$

Esta ecuación es una CIRCUNFERENCIA que degenera en el punto de coordenadas $(5,2)$.

4) Sean $F(-3{,}4)$; directriz: $y=1$; $e=2$

Solución

$e=2$, sugiere que la cónica es una hipérbola.

Si $\dfrac{PF}{PA}=e$; $\dfrac{\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}}{y-1}=2$; $\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=2(y-1)$

$(x+3)^2+(y-4)^2=[2(y-1)]^2$; $x^2+6x+9+y^2-8y+16=4(y^2-2y+1)$

$x^2+y^2-4y^2+6x-8y+8y+25-4=0$; $\boxed{x^2-3y^2+6x+21=0}$

Esta ecuación representa una HIPÉRBOLA.

5) Sean $F(-4{,}0)$; la directriz: $x=0$; $e=1$

Solución

Si $\dfrac{PF}{PA}=e$; $\dfrac{\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}}{x-0}=1$; $\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}=x$; $x^2+8x+16+y^2=x^2$

$\boxed{y^2+8x+16=0}$

Esta ecuación representa una PARÁBOLA horizontal.

EJERCICIOS

En cada inciso se da la información de una cónica, obtenga su ecuación.

1) $F(2,-3)$; directriz: $x=3$; $e=\dfrac{3}{2}$

2) $F(0{,}4)$; directriz: $y=-1$; $e=0$

3) $F(4{,}2)$; directriz: $y=2$; $e=\dfrac{1}{2}$

4) $F(0{,}0)$; directriz: $x=-2$; $e=1$

5) $F(0,-3)$; directriz: $y=1$; $e=3$

7.5. TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

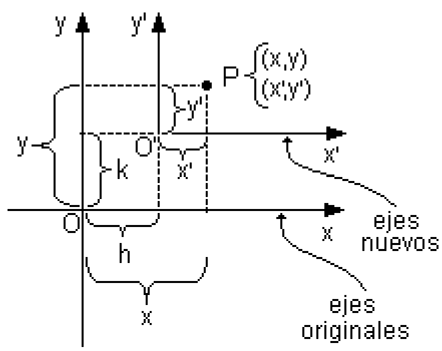
Algunas veces la ecuación de una cónica se puede escribir de una manera más simple mediante una traslación y/o una rotación de ejes, que por ciertas razones sea más conveniente para el problema que se esté resolviendo, donde un punto "P" arbitrario tenga diferentes coordenadas en diferentes sistemas coordenados.

- Con una traslación de los ejes originales, se consigue que el centro de una curva se ubique en el origen de los nuevos ejes.

- Una rotación se aplica cuando la curva es oblicua respecto a los ejes originales, logrando que sea paralela respecto a los nuevos ejes, (generalmente una ecuación de segundo grado en dos variables con término en (xy) es oblicua).

- Algunas veces es necesario con las cónicas, efectuar una traslación de ejes y también una rotación para presentar más simplificada su ecuación dependiendo del problema que se resuelve.

TRASLACIÓN. El proceso de traslación de un par de ejes a otro par de ejes, implica una transformación de coordenadas en donde tanto los ejes originales como los nuevos son paralelos y sin alterar la unidad de medida. La siguiente figura nos proporciona ayuda para encontrar las fórmulas de transformación:



- Las coordenadas del nuevo origen referidas al sistema original son $O'(h,k)$.
- $P(x,y)$ en el sistema original , $P(x',y')$ en el nuevo sistema

De la figura fácilmente se observa que: $x = x'+h$

$y = y'+k$

Estas son las fórmulas de transformación, donde al sustituir $x'+h$ en x, $y'+k$ en y en la ecuación de una curva que esté referida a los ejes originales x, y; esto da por resultado una ecuación de la misma curva pero ahora referida a los nuevos ejes x', y' ; trasladados.

EJEMPLOS

Por medio de una traslación de ejes, simplificar la ecuación dada en cada inciso:

1) $y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ (Parábola)

<u>Solución</u>

Sustituyendo las fórmulas de transformación $x = x'+h$, $y = y'+k$ en la ecuación dada:
$(y'+k)^2 - 4(x'+h) - 4(y'+k) + 8 = 0$ desarrollando y ordenando:
$y'^2 + 2ky' + k^2 - 4x' - 4h - 4y' - 4k + 8 = 0$
$y'^2 - 4x' + (2k-4)y' + k^2 - 4k - 4h + 8 = 0$ ••• (a)

Igualando a cero el coeficiente de y' y el término independiente simplificaremos
la ecuación (a): $2k - 4 = 0$; $k = \frac{4}{2} = 2$; $k = 2$

$k^2 - 4k - 4h + 8 = 0$; $(2)^2 - 4(2) - 4h + 8 = 0$; $-4h + 4 = 0$; $h = \frac{4}{4}$; $h = 1$
por lo tanto $(h,k) = (1,2)$ son las coordenadas del vértice de la parábola referidas a los ejes x, y originales.

Sustituyendo los valores de $h = 1$ y $k = 2$ en la ecuación (a) obtenemos la ecuación $y'^2 - 4x' = 0$ referida a los nuevos ejes, ya simplificada.

2) $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 21 = 0$ (Elipse)

Solución

Sustituyendo $x'+h$ en x, $y'+k$ en y, se tiene: $(x'+h)^2 + 4(y'+k)^2 + 2(x'+h) - 24(y'+k) + 21 = 0$
desarrollando y ordenando: $x'^2 + 2hx' + h^2 + 4y'^2 + 8ky' + 4k^2 + 2x' + 2h - 24y' - 24k + 21 = 0$
$x'^2 + 4y'^2 + (2h+2)x' + (8k+24)y' + h^2 + 2h + 4k^2 - 24k + 21 = 0$ ••• (b)

La ecuación (b) se simplificará si igualamos a cero los coeficientes de x' y de y':

$2h + 2 = 0$; $h = \frac{-2}{2} = -1$; $8k - 24 = 0$; $k = \frac{24}{8} = 3$
por lo tanto $(h,k) = (-1,3)$ son las coordenadas del centro de la elipse referidas a los ejes x, y originales.

Sustituyendo $h = -1$ y $k = 3$ en la ecuación (b) obtenemos la ecuación $x'^2 + 4y'^2 - 16 = 0$ referida a los nuevos ejes x', y', ya simplificada.

3) $9x^2 - 4y^2 - 36x + 16y + 56 = 0$ (Hipérbola)

Solución

Sustituyendo $x'+h$ en x, $y'+k$ en y, se obtiene: $9(x'+h)^2 - 4(y'+k)^2 - 3(x'+h) + 16(y'+k) + 56 = 0$
desarrollando y ordenando: $9x'^2 + 18hx' + 9h^2 - 4y'^2 - 8ky' - 4k^2 - 3x' - 3h + 16y' + 16k + 56 = 0$
$9x'^2 - 4y'^2 + (18h-3)x' - (8k-16)y' + 9h^2 - 4k^2 - 3h + 16k + 56 = 0$ ••• (c), se simplificará la ecuación (c) igualando a cero los coeficientes de x' y de y':

$18h-3=0$; $h=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$; $8k-16=0$; $k=\frac{16}{8}=2$

$(h,k)=\left(\frac{1}{6},2\right)$ son las coordenadas del centro de la hipérbola referidas a los ejes x,y originales. Sustituyendo $h=\frac{1}{6}$ y $k=2$ en la ecuación (c) se obtiene la ecuación $36x'^2-16y'^2+287=0$ referida a los nuevos ejes x', y', ya simplificada.

4) $x^2+4x-2y+10=0$ (Parábola)

Solución

Sustituyendo $x=x'+h$, $y=y'+k$ en la ecuación dada:

$(x'+h)^2+4(x'+h)-2(y'+k)+10=0$ desarrollando y ordenando:

$x'^2+2hx'+h^2+4x'+4h-2y'-2k+10=0$

$x'^2-2y'+(2h+4)x'+h^2+4h-2k+10=0$ ...(d) , la ecuación (d) se simplificará si el coeficiente de x' y el término independiente se anulan:

$2h+4=0$; $h=\frac{-4}{2}$; $h=-2$

$h^2+4h-2k+10=0$; $(-2)^2+4(-2)-2k+10=0$; $-2k+6=0$; $k=3$

$(h,k)=(-2,3)$ son las coordenadas del vértice de la parábola referidas a los ejes x,y originales. Sustituyendo $h=-2$ y $k=3$ en la ecuación (d) se obtiene la ecuación $x'^2-2y'=0$ referida a los nuevos ejes x', y', ya simplificada.

5) $25x^2+16y^2-200x+96y+144=0$ (Elipse)

Solución

Sustituyendo $x=x'+h$, $y=y'+k$ en la ecuación dada:

$25(x'+h)^2+16(y'+k)^2-200(x'+h)+96(y'+k)+144=0$ desarrollando y ordenando:

$25x'^2+50hx'+25h^2+16y'^2+32ky'+16k^2-200x'-200h+96y'+96k+144=0$

$25x'^2+16y'^2+(50h-200)x'+(32k+96)y'+25h^2+16k^2-200h+96k+144=0$ ...(e) , la ecuación (e) se simplificará si los coeficientes de x' y de y' se anulan:

$50h-200=0$; $h=\frac{200}{50}=4$; $32k+96=0$; $k=\frac{-96}{32}=-3$

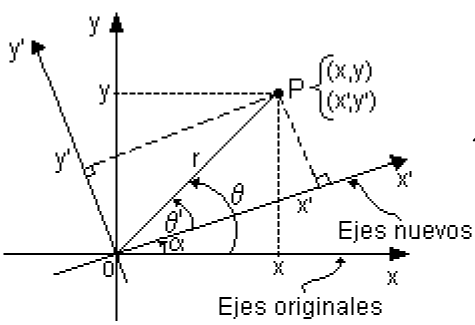
$(h,k)=(4,-3)$ son las coordenadas del centro de la elipse referidas a los ejes x,y originales. Sustituyendo $h=4$ y $k=-3$ en la ecuación (e) se obtiene la ecuación $25x'^2+16y'^2+400=0$ referida a los nuevos ejes x',y', ya simplificada.

EJERCICIOS

Aplicando una traslación de ejes, simplificar la ecuación dada en cada inciso:

1) $4x^2-y^2+24x+6y+23=0$
2) $3x^2+12x-2y+6=0$
3) $x^2+4y^2+4x+24y+36=0$
4) $2y^2-4y-x-1=0$
5) $16y^2-4x^2-16x+96y+64=0$

ROTACIÓN. Algunas veces también surge la necesidad de cambiar el sistema original rotándolo un ángulo "α" para obtener un nuevo sistema, que pueda permitir escribir una curva en una forma más simple, en donde un punto arbitrario "P" tenga diferentes coordenadas en los diferentes sistemas coordenados. Con la siguiente figura nos apoyaremos para mostrar como podemos lograr una rotación de ejes:



Si $x=r\cos\theta$ y $\theta=\theta'+\alpha$, entonces $x=r\cos(\theta'+\alpha)$ y por trigonometría se tiene que:

$$x=r(\cos\theta'\cos\alpha-sen\theta' sen\alpha)=\underbrace{r\cos\theta'}_{x'}\cos\alpha-\underbrace{rsen\theta'}_{y'}sen\alpha$$

$$\boxed{x=x'\cos\alpha-y'sen\alpha} \quad \bullet\bullet\bullet(1)$$

Si $y=rsen\theta$ y $\theta=\theta'+\alpha$ entonces $y=rsen(\theta'+\alpha)$ y por trigonometría se tiene que:

$$y=r(\cos\theta' sen\alpha+sen\theta'\cos\alpha)=r\cos\theta' sen\alpha+rsen\theta'\cos\alpha$$

$$\boxed{y=x'sen\alpha+y'\cos\alpha} \quad \bullet\bullet\bullet(2)$$

Al sustituir las expresiones $(1)\bullet\bullet\bullet$ $x=x'\cos\alpha-y'sen\alpha$, $(2)\bullet\bullet\bullet$ $y=x'sen\alpha+y'\cos\alpha$ en la ecuación general de segundo grado $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ y después de hacer operaciones y simplificaciones se obtiene la ecuación:

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0$$

En donde:

$$A'=A\cos^2\alpha+Bsen\alpha\cos\alpha+Csen^2\alpha$$
$$B'=B\cos2\alpha-(A-C)sen2\alpha$$
$$C'=Asen^2\alpha-Bsen\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha$$
$$D'=D\cos\alpha+Esen\alpha$$
$$E'=E\cos\alpha-Dsen\alpha$$
$$F'=F$$

Como parte fundamental de la simplificación de la ecuación general es desaparecer el término "Bxy", esto se logra si el coeficiente $B' = B\cos 2\alpha - (A-C)sen2\alpha$ es igual a cero o sea que $B\cos 2\alpha - (A-C)sen2\alpha = 0$ ••• (I) en donde:

$$B\cos 2\alpha = (A-C)sen2\alpha \quad ; \quad \frac{B}{A-C} = \frac{sen2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

Se obtiene la expresión $\boxed{\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}}$; $A \neq C$ que permite conocer el ángulo de rotación "α" de los ejes x, y.

Si en la expresión (I) $A = C$ se tiene $B\cos 2\alpha = 0$, la cual tendrá solución cuando $\alpha = 45^0$ ya que $\cos 90^0 = 0$.

EJEMPLOS

En cada inciso, determinar el ángulo agudo de rotación "α" de los ejes y las fórmulas de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$.

1) $x^2 + 2xy + y^2 - 4y - 8 = 0$

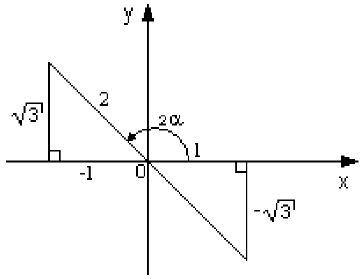
Solución

En la ecuación dada, observamos que los coeficientes $A = C = 1$, esto indica que el ángulo de rotación de los ejes es $\alpha = 45^0$ y como $\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $sen45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, las fórmulas de transformación (1) y (2) que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$x = x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y = x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

2) $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 - 2 = 0$

Solución



En la ecuación dada, observamos que $A \neq C$, por lo tanto se debe calcular $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{-\sqrt{3}}{2-1} = \frac{-\sqrt{3}}{1}$. Con ayuda del siguiente esquema observamos que para que el ángulo "α" sea agudo, se tiene: $\cos 2\alpha = \frac{-1}{2}$ y por trigonometría sabemos que:

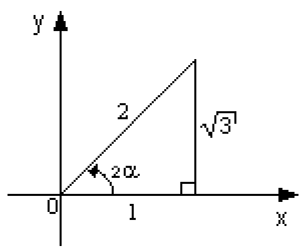
$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\alpha = sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^0$; $\alpha = 60^0$ es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas (1) y (2) de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$x = x'\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x' - \sqrt{3}y'}{2} \quad ; \quad y = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}$$

3) $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 - 4x = 0$

Solución



Como $A \neq C$, $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{-\sqrt{3}}{1-2} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$; $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$

y por trigonometría:

$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

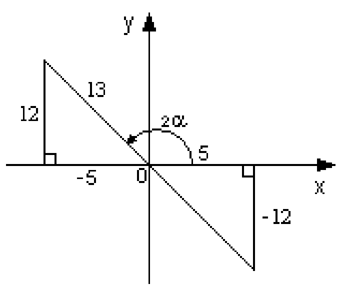
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^0$; $\alpha = 30^0$ es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas (1) y (2) de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$x = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2} \quad ; \quad y = x'\left(\frac{1}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}$$

4) $35x^2 - 12xy + 30y^2 - 30x + 6y - 24 = 0$

Solución



Como $A \neq C$, $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{-12}{35-30} = \frac{-12}{5}$; para que "α" sea agudo: $\cos 2\alpha = \frac{-5}{13}$ y por trigonometría:

$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{5}{13}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

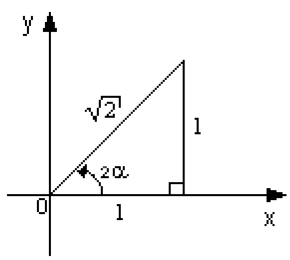
$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{-5}{13}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{4}{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}} \quad ; \quad \alpha=sen^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=56.31^0$$

$\alpha=56.31^0$ es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas (1) y (2) de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$x=x'\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)-y'\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=\frac{2x'-3y'}{\sqrt{13}} \quad ; \quad y=x'\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)+y'\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)=\frac{3x'+2y'}{\sqrt{13}}$$

5) $x^2+2xy-y^2-4\sqrt{2}x+4=0$

<u>Solución</u>



Como $A\neq C$, $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}=\frac{2}{1-(-1)}=\frac{2}{2}=1$; $\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}=45^0$

$\alpha=22.5^0$ que es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas (1) y (2) de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$sen\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

entonces:

$$x=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}-y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad ; \quad y=x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}+y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

EJERCICIOS

En cada inciso, determine el ángulo de rotación "α" de los ejes y las fórmulas de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$.

1) $3x^2-10xy-3y^2+11x-13y+21=0$
2) $2x^2-2xy+y^2+4x-6y+18=0$
3) $2x^2-2xy+2y^2+3x=0$
4) $4x^2-2xy+2y^2+x-4=0$
5) $x^2-2xy+2y^2-x-1=0$

VIII. CIRCUNFERENCIA

Objetivos: Que el alumno:

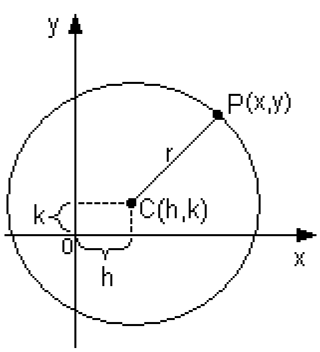
1. Explique la circunferencia como lugar geométrico.
2. Dada la ecuación de una circunferencia, sea capaz de distinguir si está representada en forma ordinaria o en forma general.
3. Dadas las coordenadas del centro y la magnitud del radio de una circunferencia, sea capaz de determinar su ecuación en sus dos formas ordinaria y general.
4. Dada la ecuación de una circunferencia en cualquiera de sus formas, sea capaz de determinar las coordenadas de su centro y la magnitud de su radio y dibujar su gráfica.
5. Dadas las coordenadas de tres puntos del plano coordenado, sea capaz de determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por estos tres puntos.

8.1. LA CIRCUNFERENCIA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Definición: Una circunferencia es el lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ cualquiera, que se mueve sobre el plano x, y de tal manera que su distancia a un punto fijo $C(h, k)$ llamado centro es una constante "r" llamada radio de la circunferencia.

8.2. FORMAS ORDINARIA (CANÓNICA) Y GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

De acuerdo con la definición anterior, su interpretación analítica aplicando la fórmula de la distancia entre 2 puntos del plano, es:



$$PC = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \quad \text{elevando al cuadrado}$$

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2} \quad \cdots (1)$$

La ecuación (1) es la FORMA ORDINARIA de la circunferencia y nos permite obtener con rapidez y facilidad las coordenadas del centro $C(h, k)$ y la magnitud de su radio "r", elementos suficientes para dibujar su gráfica, y viceversa, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria podrá escribirse inmediatamente.

- Esta ecuación (1) se satisface únicamente para puntos del plano cuya distancia al centro $C(h,k)$ es "r".
- Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas $C(h,k)=(0,0)$, la ecuación (1) resulta $\boxed{x^2+y^2=r^2}$ ...(2)
- Desarrollando algebraicamente la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ se tiene:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

denotando $D=-2h$, $E=-2k$, $F=h^2+k^2-r^2$

Obtenemos la ecuación $\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$ ...(3)

Esta ecuación (3) recibe el nombre de FORMA GENERAL de la ecuación de una circunferencia.

- En la sección 7.2 se dijo que la ecuación general de segundo grado $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ representa una circunferencia si los coeficientes $A=C$ y $B=0$, quedando la ecuación en la forma $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$, esto nos hace ver que cuando los coeficientes $A=C$ no sean igual a la unidad, dividiendo la ecuación entre A se tiene:

$$\frac{Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0}{A}=\frac{0}{A}$$

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

logrando así expresar la ecuación de la circunferencia en la forma general (3).

- Cuando se conoce la forma general de una circunferencia (3), esta puede reducirse a su forma ordinaria (1) por medio del método de completar los cuadrados en los términos en "x" y en los de "y" como se mostrará en los siguientes.

EJEMPLOS

En cada inciso, conocidas las coordenadas del centro de una circunferencia y la magnitud de su radio, se pide obtener sus ecuaciones en forma ordinaria, general y hacer un dibujo de su gráfica.

1) $C(-2,3)$; $r=3$

<u>Solución</u>

Sabemos que la forma ordinaria es: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

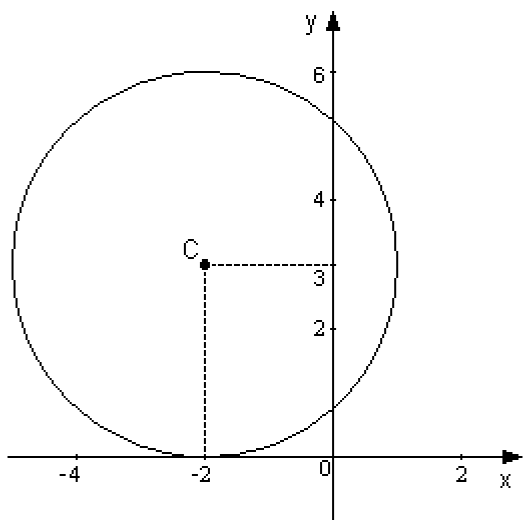
Por simple sustitución de la información dada se tiene:

$$[x-(-2)]^2+(y-3)^2=(3)^2$$

$$\boxed{(x+2)^2+(y-3)^2=9} \text{ Forma ordinaria}$$

Desarrollando algebraicamente la forma ordinaria:

$x^2+4x+4+y^2-6y+9=9$; $\boxed{x^2+y^2+4x-6y+4=0}$ Forma general



- Una segunda forma de obtener la ecuación en la forma general puede ser la siguiente:

  Si sabemos que $D=-2h=-2(-2)=4$

  $E=-2k=-2(3)=-6$

  $F=h^2+k^2-r^2=(-2)^2+(3)^2-(3)^2=4$

Sustituyendo estos valores en la forma general

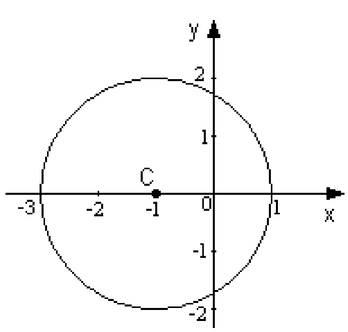
$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ se tiene:

$$\boxed{x^2+y^2+4x-6y+4=0} \text{ Forma general.}$$

Recordemos que $D=4$ y $E=-6$ indican que el centro se localiza fuera del origen y $F=4$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

2) $C(-1,0)$; $r=2$

<u>Solución</u>



Si $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$[x-(-1)]^2+(y-0)^2=(2)^2$

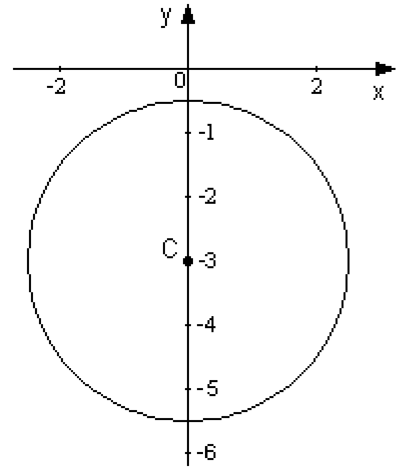
$\boxed{(x+1)^2+y^2=4}$ Forma ordinaria

$x^2+2x+1+y^2=4$

$\boxed{x^2+y^2+2x-3=0}$ Forma general

Como $E=0$, el centro se localiza sobre el eje "x", $F=-3$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

3) $C(0,-3)$; $r=\frac{5}{2}$



Solución

Como $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-0)^2+[y-(-3)]^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\boxed{x^2+(y+3)^2=\frac{25}{4}}$ Forma ordinaria

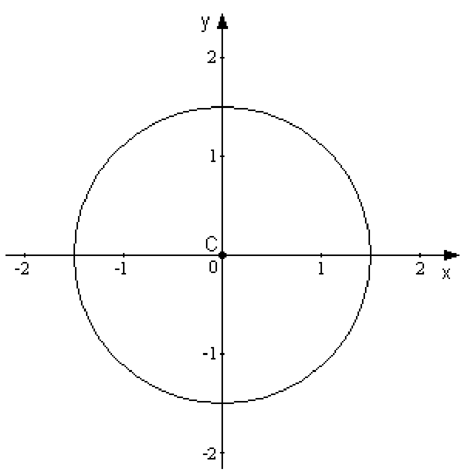
$x^2+y^2+6y+9-\frac{25}{4}=0$

$\boxed{4x^2+4y^2+24y+11=0}$ Forma general

$D=0$ indica que el centro se localiza sobre el eje "y", $F=11$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

4) $C(0,0)$; $r=\frac{3}{2}$

Solución



Como el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas, su ecuación es:

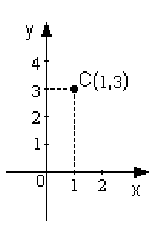
$x^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$; $\boxed{x^2+y^2=\frac{9}{4}}$ Forma ordinaria

$x^2+y^2-\frac{9}{4}=0$; $\boxed{4x^2+4y^2-9=0}$ Forma general

Como $D=E=0$ el centro coincide con el origen, $F=-9$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

5) $C(1,3)$; $r=0$

Solución



Como $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-1)^2+(y-3)^2=(0)^2$

$\boxed{(x-1)^2+(y-3)^2=0}$ Forma ordinaria

Esta circunferencia degenera en el punto de coordenadas $C(1,3)$, ya que no podemos trazar el radio por ser cero.

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0} \text{ Forma general}$$

En cada inciso se da la forma general de la ecuación de una circunferencia, se pide obtener el centro, el radio y graficarla.

6) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$

Solución

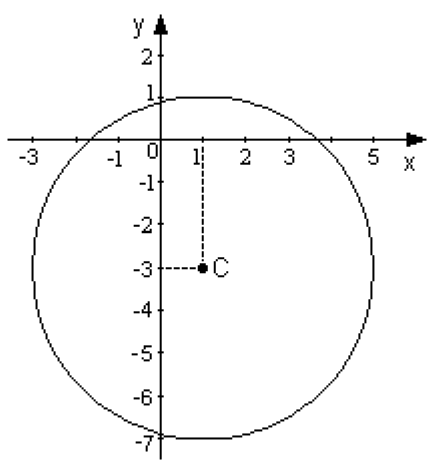
En la ecuación dada, por medio del método de completar los cuadrados en los términos en "x" y en los de "y" se obtendrá la forma ordinaria que nos permitirá conocer con facilidad y rapidez las coordenadas del centro y la magnitud del radio y con esto poder graficarla como sigue:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$$
$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6 \text{ ordenando términos}$$
$$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + y^2 + 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \text{ completando los cuadrados}$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 6 + 1 + 9$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16} \text{ Forma ordinaria}$$

Por lo tanto las coordenadas del centro son $C(1,-3)$ y la magnitud del radio es $r = \sqrt{16} = 4$

$$\boxed{r = 4}$$



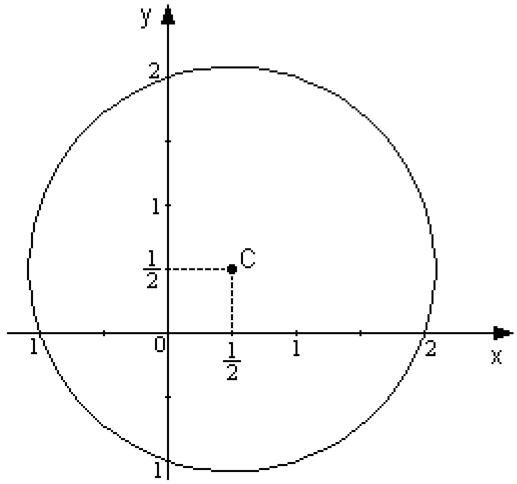
Otra manera de obtener las coordenadas del centro y la magnitud del radio es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } D = -2h \;;\; -2 = -2h \;;\; h = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ E = -2k \;;\; 6 = -2k \;;\; k = \dfrac{6}{-2} = -3 \end{array}\right\} C(1,-3)$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2 \;;\; -6 = (1)^2 + (-3)^2 - r^2 \;;\; r^2 = 1 + 9 + 6$$
$$r^2 = 16 \;;\; r = \sqrt{16} = 4 \;;\; \boxed{r = 4}$$

7) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$

<u>Solución</u>



En este caso, lo primero es conseguir que los coeficientes de x^2 y de y^2 sean la unidad, para esto, se divide la ecuación dada entre 2 como sigue:

$$\frac{2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 4}{2} = \frac{0}{2}$$

$x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$ ordenando términos

$x^2 - x + y^2 - y = 2$; completando cuadrados:

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

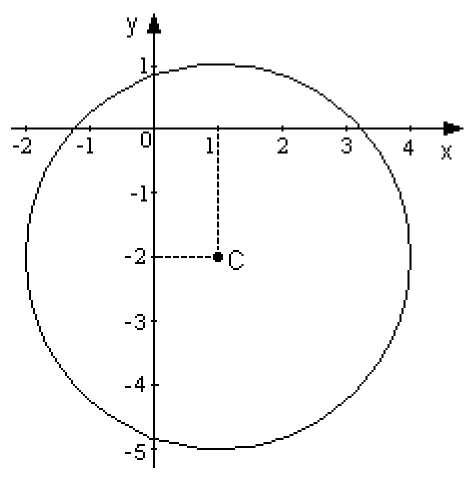
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \;\; ; \;\; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

$\boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}}$ Forma ordinaria

$\boxed{C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$; $\boxed{r = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.6}$

8) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

<u>Solución</u>



Ordenando y completando cuadrados como sigue:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4$$

$$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + y^2 + 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

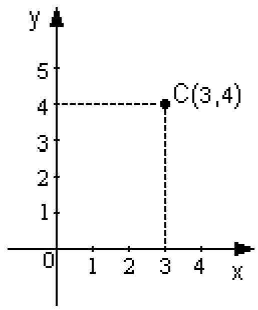
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 + 1 + 4$$

$\boxed{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9}$ Forma ordinaria

$\boxed{C(1,-2)}$; $r = \sqrt{9} = 3$; $\boxed{r = 3}$

9) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = -25$

Solución



$x^2 - 6x + y^2 - 8y = -25$ completando cuadrados

$$x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + y^2 - 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -25 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

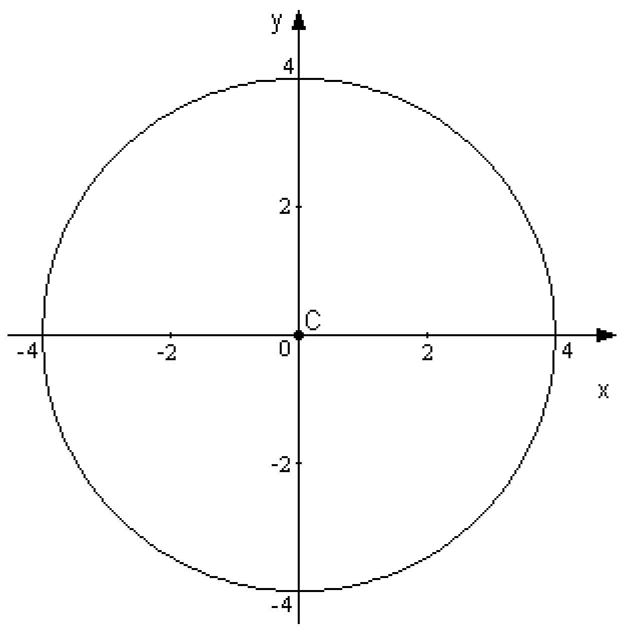
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = -25 + 9 + 16$$

$\boxed{(x-3)^2 + (y-4)^2 = 0}$ Forma ordinaria

$$\boxed{C(3,4)}\ ;\ \boxed{r = 0}$$

10) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

Solución



En este caso, la ecuación dada prácticamente esta en las dos formas (ordinaria y general), ya que $x^2 + y^2 = 16$ es la forma ordinaria, donde las coordenadas del centro son $C(0,0)$ y la magnitud del radio $r = \sqrt{16} = 4$; $r = 4$

EJERCICIOS

En cada inciso, se conocen las coordenadas del centro de una circunferencia y la magnitud de su radio, obtenga sus ecuaciones en forma ordinaria, en forma general y dibuje su gráfica.

1) $C(3,-2)$; $r = 5$

2) $C(0,-1)$; $r = 3$

3) $C(-3,0)$; $r = 1$

4) $C(4,1)$; $r = 0$

5) $C(0,0)$; $r = \sqrt{5}$

En los siguientes incisos se da la forma general de la ecuación de una circunferencia, obtenga las coordenadas del centro, la magnitud del radio y dibujar su gráfica.

6) $-3x^2-3y^2+3x+6=0$
7) $x^2+y^2+5y-1=0$
8) $7x^2+7y^2-14x-35y-21=0$

9) $x^2+y^2-36=0$
10) $2x^2+2y^2-8x-28y+106=0$

8.3. CIRCUNFERENCIA DETERMINADA POR TRES CONDICIONES DADAS

La ecuación en forma ordinaria de una circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, contiene tres parámetros h,k y r que en cada caso pueden tener valores diferentes. De la misma manera, la forma general de la ecuación de una circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, contiene también tres parámetros D,E y F que pueden ser diferentes, y que como se verá en ambos casos, puede obtenerse su valor a partir de TRES CONDICIONES dadas e independientes.

Se mostrará a continuación la forma en que se pueden tratar problemas en los que se dan 3 condiciones y se pide obtener la ecuación de la circunferencia.

EJEMPLOS

Obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos $A(1,-1)$, $B(5,3)$ y $C(-3,5)$.

Solución

Este problema lo vamos a resolver de tres maneras diferentes:

1) Si los puntos A,B y C están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación general:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Sustituyendo $A(1,-1)$: $(1)^2+(-1)^2+D(1)+E(-1)+F=0$

$$1+1+D-E+F=0$$
$$D-E+F=-2 \quad \cdots(1)$$

Sustituyendo $B(5,3)$: $(5)^2+(3)^2+D(5)+E(3)+F=0$

$$25+9+5D+3E+F=0$$
$$5D+3E+F=-34 \quad \cdots(2)$$

Sustituyendo $C(-3,5)$: $(-3)^2+(5)^2+D(-3)+E(5)+F=0$

$$9+25-3D+5E+F=0$$
$$-3D+5E+F=-34 \quad \cdots(3)$$

Ahora, se resuelven como un sistema de ecuaciones simultáneas las ecuaciones (1), (2) y (3) para obtener los valores de los parámetros D, E y F:

$$\begin{cases} D - E + F = -2 & \cdots(1) \\ 5D + 3E + F = -34 & \cdots(2) \\ -3D + 5E + F = -34 & \cdots(3) \end{cases}$$

Se recomienda que en la solución de este sistema de ecuaciones se aplique el método que mejor conozca y domine el estudiante, en este caso, se resolverá aplicando el método de CRAMER, en donde el valor de las incógnitas, está dado por:

$$D = \frac{\Delta_D}{\Delta}, \; E = \frac{\Delta_E}{\Delta}, \; F = \frac{\Delta_F}{\Delta}$$

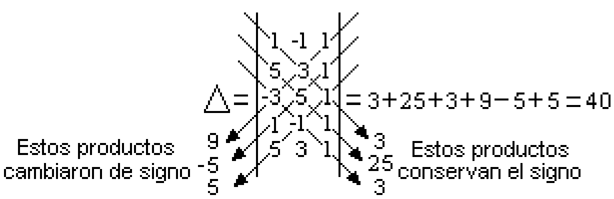
Iniciando con el cálculo del determinante del sistema "Δ" que se forma con los coeficientes de las incógnitas del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Si el valor de este determinante es cero, el sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si es distinto de cero, se tendrá solución única en el sistema de ecuaciones.

De la misma manera, para resolver determinantes de tercer orden (3 renglones y 3 columnas), por su facilidad de aplicación, se recomienda el MÉTODO DE SARRUZ (que sólo es aplicable para determinantes de tercer orden) como sigue:

El arreglo se forma repitiendo los 2 primeros renglones y se efectúan productos como indican las flechas:



Como el determinante del sistema $\Delta = 40$, es distinto de cero, se continúa la solución del sistema calculando cada incógnita como se muestra:

$D = \dfrac{\Delta_D}{\Delta}$; Δ_D es el determinante que resulta de suprimir del sistema la columna de los coeficientes de las "D" y en su lugar se coloca la columna de los términos independientes tal y como están en el segundo miembro, esto es:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -34 & 3 & 1 \\ -34 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolviéndolo de la misma manera que el determinante del sistema Δ:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -34 & 3 & 1 \\ -34 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -34 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6-170+34+102+10-34 = -64$$

Por lo tanto $D = \dfrac{\Delta_D}{\Delta} = \dfrac{-64}{40}$; $\boxed{D = -\dfrac{8}{5}}$

$E = \dfrac{\Delta_E}{\Delta}$; Δ_E es el determinante que resulta de suprimir del sistema la columna de los coeficientes de las "E" y en su lugar se coloca la columna de los términos independientes:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -34 & 1 \\ -3 & -34 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolviendo de la misma manera que los anteriores:

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -34 & 1 \\ -3 & -34 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -34 & 1 \end{vmatrix} = -34-170+6-102+34+10 = -256$$

Por lo tanto $E = \dfrac{\Delta_E}{\Delta} = \dfrac{-256}{40}$; $\boxed{E = -\dfrac{32}{5}}$

El valor de la incógnita "F" se puede calcular como las anteriores D y E, o bien si se prefiere, sustituyendo los valores de D y E en cualquiera de las 3 ecuaciones del sistema, en este caso, en la ecuación (1) se tiene:

$$D - E + F = -2 \quad \cdots(1)$$

$\left(-\dfrac{8}{5}\right) - \left(-\dfrac{32}{5}\right) + F = -2$, despejando F :

$$F = -2 + \frac{8}{5} - \frac{32}{5} = \frac{-10+8-32}{5} = -\frac{34}{5} \quad ; \quad \boxed{F = -\frac{34}{5}}$$

Sustituyendo $D = -\dfrac{8}{5}$, $E = -\dfrac{32}{5}$ y $F = -\dfrac{34}{5}$ en la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$:

$$x^2+y^2-\frac{8}{5}x-\frac{32}{5}y-\frac{34}{4}=0$$

$$\boxed{5x^2+5y^2-8x-32y-34=0}$$

Es la ecuación en forma general de la circunferencia que pasa por los 3 puntos dados A, B y C.

Si se transforma esta ecuación a la forma ordinaria, primero la dividimos entre 5:

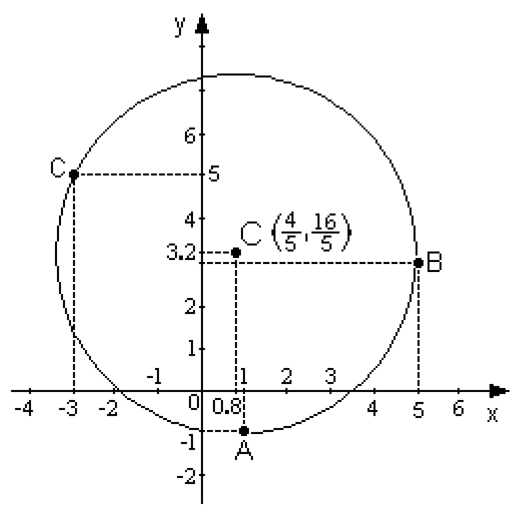
$$\frac{5x^2+5y^2-8x-32y-34}{5}=\frac{0}{5} \quad ; \quad x^2+y^2-\frac{8}{5}x-\frac{32}{5}y-\frac{34}{4}=0$$

ordenando y completando cuadrados: $x^2-\frac{8}{5}x+\left(\frac{8}{10}\right)^2+y^2-\frac{32}{5}y+\left(\frac{32}{10}\right)^2=\frac{34}{5}+\left(\frac{8}{10}\right)^2+\left(\frac{32}{10}\right)^2$

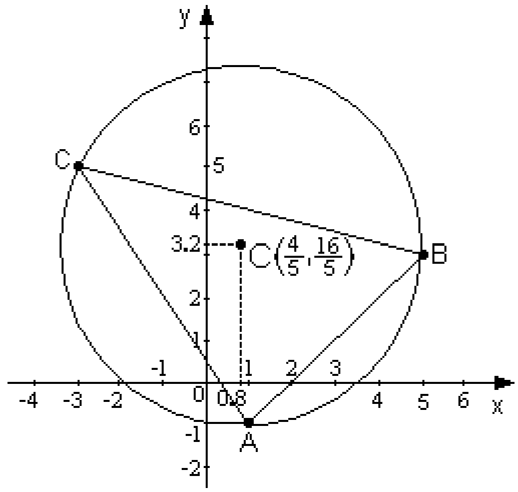
$$\left(x-\frac{8}{10}\right)^2+\left(y-\frac{32}{10}\right)^2=\frac{680+64+1024}{100}$$

$$\boxed{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{16}{5}\right)^2=\frac{442}{25}}$$

Es la ecuación en forma ordinaria de la circunferencia que pasa por los 3 puntos $A(1,-1)$, $B(5,3)$, $C(-3,5)$ y cuyo centro es $C\left(\frac{4}{5},\frac{16}{5}\right)$ y de radio $r=\sqrt{\frac{442}{25}}$



2) Uniendo los puntos $A(1,-1)$, $B(5,3)$ y $C(-3,5)$ se forma un triángulo, se obtiene la ecuación de las mediatrices de dos de sus lados:



- <u>Ecuación de la mediatriz del lado AB</u> el punto medio tiene coordenadas $M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$M_{AB}\left(\frac{1+5}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(3{,}1)$ la pendiente de la mediatriz es recíproca y de signo contrario a la pendiente del lado AB, o sea:

Si $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{3+1}{5-1}=\frac{4}{4}=1$, entonces la pendiente de la mediatriz es $m=-1$, con el punto $M_{AB}(3{,}1)$ y la pendiente de la mediatriz calculamos su ecuación: $y-y_M=m(x-x_M)$; $y-1=-1(x-3)$; $y=-x+3+1$

$$\boxed{y=-x+4} \quad \bullet\bullet\bullet(1)$$

- <u>Ecuación de la mediatriz del lado AC</u>

De la misma manera, se tiene: $M_{AC}\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{1-3}{2},\frac{-1+5}{2}\right)=(-1{,}2)$;

$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{5+1}{-3-1}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$, por lo tanto, $m=\frac{2}{3}$; $y-2=\frac{2}{3}(x+1)$; $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}+2$

$$\boxed{y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}} \quad \bullet\bullet\bullet(2)$$

Resolviendo como un sistema de ecuaciones simultáneas las ecuaciones (1) y (2), se obtendrán las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por los 3 puntos A,B y C (el circuncentro) como sigue:

Por el método de igualación:

$$y=-x+4 \quad \bullet\bullet\bullet(1)$$

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3} \quad \bullet\bullet\bullet(2)$$

$-x+4=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$; $4-\frac{8}{3}=\frac{2}{3}x+x$; $\frac{12-8}{\cancel{3}}=\frac{2x+3x}{\cancel{3}}$; $12-8=2x+3x$; $4=5x$; $\boxed{x=\frac{4}{5}}$

Sustituyendo $x=\frac{4}{5}$ en cualesquiera de las ecuaciones (1) ó (2), digamos en la (1):

$$y=-\left(\frac{4}{5}\right)+4=\frac{-4+20}{5}\ ;\ \boxed{y=\frac{16}{5}}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de la circunferencia son $\left(\frac{4}{5},\frac{16}{5}\right)$. La magnitud del radio "r" se obtiene calculando la distancia del centro de la circunferencia a cualquiera de los puntos A,B ó C, digamos:

$$r=CA=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2+\left(-1-\frac{16}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{21}{5}\right)^2}\ ;\ \boxed{r=\sqrt{\frac{442}{25}}}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia que pasa por los 3 puntos A,B y C es:

$$\boxed{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{16}{5}\right)^2=\frac{442}{25}}$$

3) Se sabe que la ecuación de una circunferencia que pasa por 3 puntos no colineales $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ y $C(x_C,y_C)$ está dada por el determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0$$

En nuestro problema, $A(1,-1)$, $B(5,3)$ y $C(-3,5)$, el arreglo del determinante es:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ (1)^2+(-1)^2 & 1 & -1 & 1 \\ (5)^2+(3)^2 & 5 & 3 & 1 \\ (-3)^2+(5)^2 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \\ 34 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{array}{c|cccc|} & + & - & + & - \\ + & x^2+y^2 & x & y & 1 \\ - & 2 & 1 & -1 & 1 \\ + & 34 & 5 & 3 & 1 \\ - & 34 & -3 & 5 & 1 \end{array}$$

Para resolver este determinante de orden 4 (4 renglones y 4 columnas), se propone el método de MENORES Y COFACTORES que consiste primero, en asignarle signos a los renglones y a las columnas iniciando de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo alternando los signos, iniciando con positivo, luego negativo y así sucesivamente como se muestra, a continuación se elige cualquier renglón o columna, por ejemplo el primer renglón, tomando el primer elemento (x^2+y^2) y asignándole el signo que resulta de multiplicar los signos del renglón y la columna a la que pertenece $(+)(+)=(+)$, a continuación, se elimina su renglón y su columna al que pertenece y se multiplica este factor (x^2+y^2) por el menor determinante que queda al eliminar renglón y columna del factor correspondiente, o sea:

$$\left(x^2+y^2\right)\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ -3 & 5 & 1\end{vmatrix} = \left(x^2+y^2\right)(3+25+3+9-5+5) = \left(x^2+y^2\right)(40) = 40x^2+40y^2 \quad \cdots (1)$$

Procediendo de la misma manera con el factor que sigue (x) del renglón elegido, su signo es $(+)(-)=(-)$ y su menor determinante es:

$$(-x)\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 34 & 3 & 1\\ 34 & 5 & 1\end{vmatrix} = (-x)(6+170-34-102-10+34) = (-x)(64) = -64x \quad \cdots (2)$$

El siguiente factor es (y), su signo resulta $(+)(+)=(+)$ y su menor determinante es:

$$(y)\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 34 & 5 & 1\\ 34 & -3 & 1\end{vmatrix} = (y)(10-102+34-170+6-34) = (y)(-256) = -256y \quad \cdots (3)$$

El último factor del renglón elegido es (1), su signo es $(+)(-)=(-)$ y su menor determinante es:

$$(-1)\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 34 & 5 & 3\\ 34 & -3 & 5\end{vmatrix} = (-1)(50+102+102+170+18-170) = (-1)(272) = -272 \quad \cdots (4)$$

Sumando los resultados (1), (2), (3) y (4) e igualando a cero se tiene: $40x^2+40y^2-64x-256y-272=0$

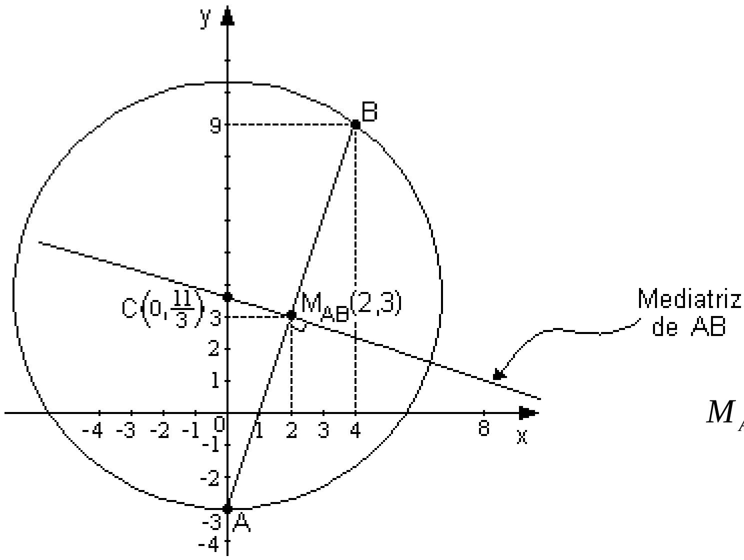
Dividiendo toda la ecuación entre 40, se obtiene la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C dados no colineales:

$$\frac{40x^2+40y^2-64x-256y-272}{40} = \frac{0}{40}$$

$$\boxed{x^2+y^2-\frac{8}{5}x-\frac{32}{5}y-\frac{34}{5}=0}$$

4) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,-3)$ y $B(4,9)$ y cuyo centro se localiza sobre el eje "y".

<u>Solución</u>



Si la circunferencia pasa por los puntos A y B, la recta que une estos dos puntos es una recta secante de la circunferencia, por lo tanto, el centro se localizará sobre la mediatriz de la secante AB esto es:

Punto medio de AB:

$$M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{0+4}{2},\frac{-3+9}{2}\right)=(2,3)$$

Pendiente de AB:

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-3-9}{0-4}=\frac{-12}{-4}=3$$

La pendiente de la mediatriz de AB: $m=-\frac{1}{3}$

Ecuación de la mediatriz de AB:

$$y-y_M=m(x-x_M)\ ;\ y-3=-\frac{1}{3}(x-2)\ ;\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}+3\ ;\ \boxed{y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}}\ \cdots(1)$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas formado por la ecuación de la mediatriz (1) y la ecuación del eje "y" $(x=0)$ como sigue:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3} & \cdots(1) \\ x=0 \end{cases}$$

Sustituyendo $x=0$ en la ecuación (1): $y=\frac{11}{3}$, por lo tanto $C\left(0,\frac{11}{3}\right)$

Calculando la distancia CA o CB se obtiene la magnitud del radio $r=CA=CB$

$$r=CA=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(0-0)^2+\left(-3-\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{20}{3}\right)^2}=\frac{20}{3}$$

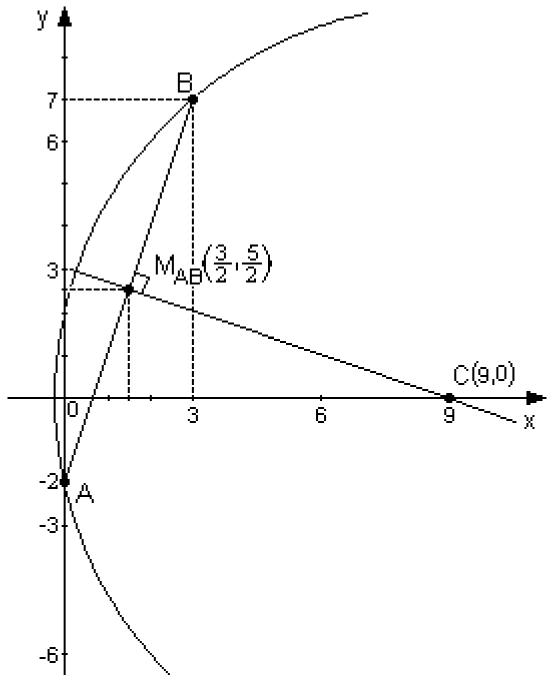
$$\boxed{r=\frac{20}{3}}$$

La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A y B y con centro sobre el eje "y" es:

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\left(\frac{20}{3}\right)^2\quad ;\quad \boxed{x^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\frac{400}{9}}$$

5) Obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,-2)$ y $B(3,7)$ cuyo centro se localiza sobre el eje "x".

Solución



Punto medio de AB:

$$M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{0+3}{2},\frac{-2-7}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Pendiente de AB:

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-2-7}{0-3}=\frac{-9}{-3}=3$$

Pendiente de la mediatriz de AB: $m=-\frac{1}{3}$

Ecuación de la mediatriz de AB:

$$y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{3}x+3}\ \bullet\bullet\bullet(1)$$

Coordenadas del centro de la circunferencia:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+3 & \bullet\bullet\bullet(1) \\ y=0 \end{cases}$$

Sustituyendo $y=0$ en (1): $x=9$; $C(9,0)$

La magnitud del radio $r=CA=\sqrt{(0-9)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{81+4}$; $\boxed{r=\sqrt{85}}$

La ecuación de la circunferencia que pasa por A y B, con centro sobre el eje "x" es:

$$(x-9)^2+(y-0)^2=\left(\sqrt{85}\right)^2 \quad ; \quad \boxed{(x-9)^2+y^2=85}$$

EJERCICIOS

En los incisos 1-3 encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los 3 puntos $A(0,0)$, $B(-3,-6)$, $C(-7,0)$ aplicando el método que se indica:

1) Resuelva con el método del ejemplo **1)**
2) Aplique el método del ejemplo **2)**
3) Aplicando el método del ejemplo **3)**

4) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,3)$ y $B(4,-9)$ y cuyo centro se localiza sobre el eje "y".

5) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,2)$ y $B(3,-7)$ y cuyo centro se localiza sobre el eje "x".

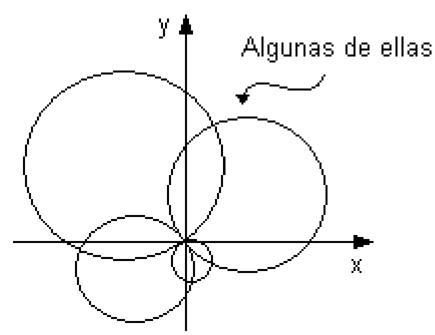
8.4. FAMILIAS DE CIRCUNFERENCIAS

El principio básico de las familias de curvas, consiste en que estas cumplan con ciertas condiciones dadas. En el caso de las circunferencias se tienen familias de uno, dos y tres parámetros, pudiendo obtener la ecuación de cualquier circunferencia de la familia asignando simplemente un valor particular a cada parámetro según el caso.

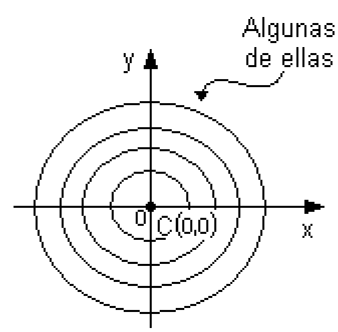
EJEMPLOS

1) La ecuación en forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ contiene <u>3 parámetros</u> D, E y F y representa la familia formada por todas las circunferencias del plano x, y, en donde D, E y F pueden tomar cualquier valor real o sea $D, E, F \in \mathbb{R}$.

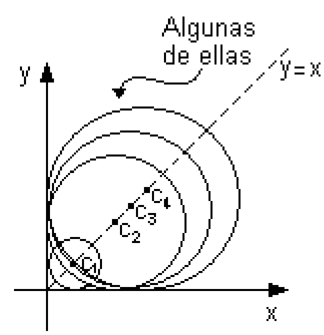
2) La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$ <u>contiene 2 parámetros</u> D y E que pueden tomar cualquier valor real y representa la familia formada por todas las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas (con todos los radios posibles).



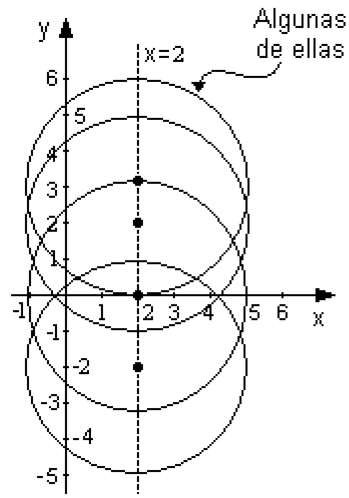
3) La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ <u>contiene un parámetro</u> $r > 0$ y representa una familia de circunferencias concéntricas (con el mismo centro) que es el origen de coordenadas $C(0,0)$ y con todos los radios posibles.



4) La ecuación $(x-h)^2 + (y-h)^2 = h^2$ <u>contiene un parámetro</u> $h > 0$ y representa una familia de circunferencias tangentes a los ejes coordenados y que tienen su centro $C(h,h)$ sobre la recta $y = x$, a este tipo de circunferencias se les llama <u>coaxiales</u> ya que todos sus centros son colineales.



5) La ecuación $(x-2)^2+(y-k)^2=9$ contiene un parámetro $k\in\mathbb{R}$ y representa la familia de circunferencias cuyos centros se localizan sobre la recta $x=2$ y todas de radio $r=3$.



EJERCICIOS

En cada inciso diga que condiciones cumplen todas las circunferencias de la familia, cuántos parámetros contiene y haga un dibujo de algunas de ellas.

1) $(x\pm r)^2+y^2=r^2$; $r>0$

2) $(x-h)^2+(y-1)^2=25$; $h\in\mathbb{R}$

3) $(x-h)^2+(y-h)^2=r^2$; $h\in\mathbb{R}, r>0$

4) $x^2+y^2+Dx+Dy=0$; $D\in\mathbb{R}$

5) $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$; $r>0$

AUTOEVALUACIÓN DE LOS CAPÍTULOS DEL V AL VIII

1) El dominio de la ecuación $y=\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}$ es:

a) $\mathbb{R}-\{2\}$ b) $\mathbb{R}-\{1,4\}$ c) $\mathbb{R}-\{1,2\}$ d) $\mathbb{R}-\{2,4\}$

2) Las intersecciones de la ecuación $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ con los ejes x, y son:

a) $x=-2$, $y=2$ b) $x=2$, $y=-2$ c) $x=2$, $y=2$ d) $x=-2$, $y=-2$

3) La función $y=2x^2$ es simétrica respecto a:

a) Eje x b) Eje y c) Origen d) Ningún eje

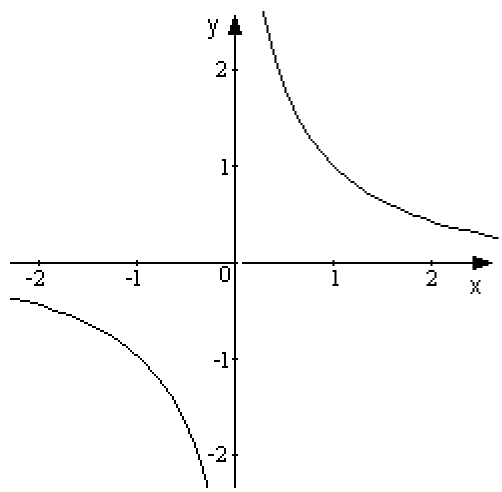
4) Las asíntotas horizontal y vertical de la función $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ son:

a) $y=1$, $x=-2$ b) $y=-1$, $x=2$ c) $y=-1$, $x=-2$ d) $y=1$, $x=2$

5) La gráfica tiene por ecuación:

a) $y=\dfrac{1}{x^2}$ b) $y=x^2$

c) $y=\dfrac{1}{x}$ d) $y=x$



6) La ecuación del lugar geométrico de la trayectoria de un punto $P(x,y)$ que durante su movimiento siempre se encuentra a la misma distancia “b” del eje x, es:

a) $y=\dfrac{1}{b}$ b) $y=b^2$ c) $y=-\dfrac{1}{b}$ d) $y=b$

7) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-3,2)$, $B(4,-2)$, es:

a) $4x-7y-2=0$ b) $4x+7y-2=0$ c) $4x+7y+2=0$ d) $4x-7y+2=0$

8) Una recta tiene pendiente $m=-1$ y pasa por el punto $P(1,1)$, su ecuación es:

a) $y=-x-2$ b) $y=x+2$ c) $y=-x+2$ d) $y=x-2$

9) ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen de la recta $x-4y+12=0$?

a) $m=-\frac{1}{4}$, $b=3$ b) $m=\frac{1}{4}$, $b=3$ c) $m=\frac{1}{4}$, $b=-3$ d) $m=-\frac{1}{4}$, $b=-3$

10) La forma general de la recta $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, es:

a) $3x-2y-6=0$ b) $3x-2y+6=0$ c) $3x+2y-6=0$ d) $3x+2y+6=0$

11) La ecuación de la recta en forma normal cuando $\alpha=45^0$ y $p=5$, es:

a) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-5=0$ b) $\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}-5=0$ c) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-5=0$ d) $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-5=0$

12) $A(-2,3)$, $B(2,2)$ y $C(0,-1)$ son los vértices de un triángulo, la ecuación de la altura por el vértice A es:

a) $2x+3y-5=0$ b) $2x+3y+5=0$ c) $2x-3y-5=0$ d) $2x-3y+5=0$

13) La distancia del punto $P(-2,3)$ a la recta $3x-2y-2=0$, es:

a) $d=\frac{13}{\sqrt{13}}$ b) $d=\frac{14}{\sqrt{13}}$ c) $d=\frac{15}{\sqrt{13}}$ d) $d=\frac{16}{\sqrt{13}}$

14) ¿Qué curva describe la ecuación $x^2-xy+2y^2+x-2y+1=0$?

a) Circunferencia b) Hipérbola c) Parábola d) Elipse

15) La ecuación $9x^2-16y^2-16x-9y+100=0$ es una:

a) Elipse b) Hipérbola c) Circunferencia d) Parábola

16) Si la excentricidad de una cónica es $e<1$, se trata de una:

a) Elipse b) Circunferencia c) Parábola d) Hipérbola

17) La ecuación $2x^2+2y^2+3x+2y-1=0$ pertenece a una:

a) Hipérbola b) Elipse c) Parábola d) Circunferencia

18) La forma ordinaria de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, es:

a) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ c) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

19) La forma general de la circunferencia $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, es:

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$

20) La ecuación de la circunferencia que tiene centro $C(3,3)$ y es tangente a los ejes coordenados x, y es:

a) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$ c) $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 9 = 0$

HOJA DE RESPUESTAS DE LA AUTOEVALUACIÓN DE LOS CAPÍTULOS DEL V AL VIII

1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d
16	a	b	c	d
17	a	b	c	d
18	a	b	c	d
19	a	b	c	d
20	a	b	c	d

Para obtener tu calificación, usa la siguiente fórmula:

$$Calificaci\acute{o}n = \left[N^{\circ}\ de\ respuestas\ correctas - \frac{N^{\circ}\ de\ incorrectas}{3} \right](5)$$

IX. LA PARÁBOLA

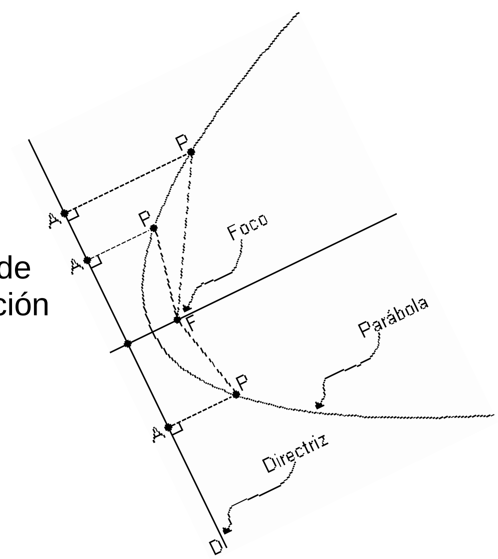
Objetivos: Que el alumno:

1. Conozca los diferentes elementos que componen a una parábola.
2. Identifique a una parábola geométricamente en su forma horizontal y vertical con centro en el origen y fuera de el.
3. Reconozca las ecuaciones ordinaria y general de una parábola con centro en el origen y fuera de el.
4. Resuelva ejercicios de parábola, a partir de sus formas ordinaria y general, con centro y fuera del origen, para que sea capaz de interpretarlas analíticamente y geométricamente.
5. Resuelva ejercicios de parábola, a partir de condiciones geométricas, con centro y fuera del origen, para que sea capaz de obtener sus principales elementos.

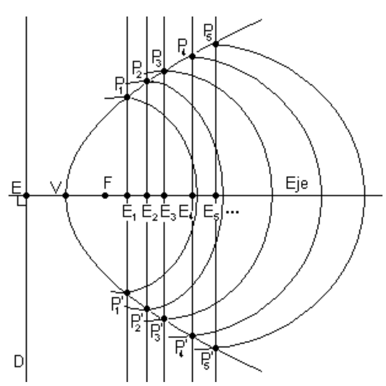
9.1. LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Definición: Se llama parábola al lugar geométrico de un punto "P" que se mueve en un plano, en forma tal que su distancia a un punto fijo "F" (llamado foco) es igual a su distancia a una recta fija "D" (llamada directriz).

Una interpretación gráfica de esta definición puede ser la siguiente, en donde por definición $d(PF) = d(PA)$



9.2. CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA CON REGLA Y COMPÁS



El siguiente procedimiento es una forma de construir una parábola utilizando regla y compás, sobre la base de que conocemos la directriz "D" y el foco "F" de la parábola.

a) Se traza el <u>eje focal</u> (o simplemente eje) que es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz "D" y la cruza en el punto "E".

b) Se determina el vértice "V" de la parábola que es el punto medio del segmento EF.

c) Se eligen arbitrariamente algunos puntos sobre el eje focal a la derecha del vértice, sean por ejemplo $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, \ldots$ Por cada uno de estos puntos se trazan rectas paralelas a la directriz (cuerdas).

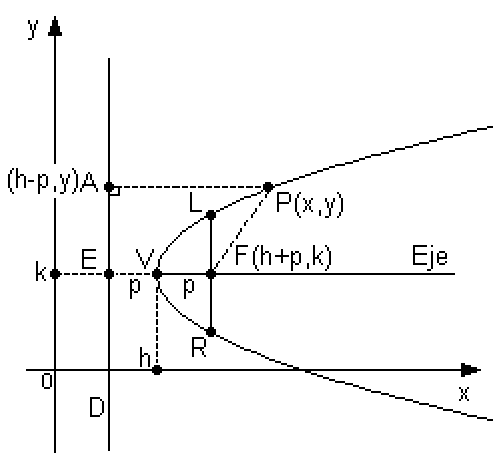
d) Con un compás, haciendo centro en el foco "F" y radios $EE_1, EE_2, EE_3, EE_4, EE_5, \ldots$ se trazan arcos de círculo que cortan a cada cuerda (segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola) en los puntos $P_1, P_1^{'}, P_2, P_2^{'}, P_3, P_3^{'}, P_4, P_4^{'}, P_5, P_5^{'}, \ldots$ Estos puntos pertenecen a la parábola (cumplen con la definición).

e) Uniendo con línea continua los puntos anteriores junto con el vértice, podemos trazar una parte de la parábola ya que es una curva que se extiende indefinidamente y en la hoja de papel solo podemos dibujar parte de ella.

f) Observar cualquier parábola es simétrica respecto a su eje.

9.3. ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA EN LAS FORMAS ORDINARIA Y GENERAL CON EJE FOCAL PARALELO CON LOS EJES COORDENADOS

Para resolver este problema, nos remitiremos nuevamente a la ayuda de los sistemas de coordenadas, para interpretar y describir las relaciones existentes de un lugar geométrico en el plano cartesiano y las expresiones algebraicas que lo representan.



- Consideremos una parábola con su eje paralelo al eje "x".
- Denotemos por "h" y "k" las coordenadas del vértice $V(h,k)$.
- Si la distancia del vértice al foco es $d(VF) = p = d(EV)$, entonces las coordenadas del foco son $F(h+p,k)$.
- El punto "A" es el pié de la perpendicular desde el punto $P(x,y)$ a la directriz "D" y sus coordenadas son $A(h-p,y)$.
- Por definición $d(PF) = d(PA)$, aplicando la fórmula de la distancia entre 2 puntos del plano, se tiene:

$$d(PF) = \sqrt{(x_p - x_F)^2 + (y_p - y_F)^2} = \sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_A)^2} = d(PA)$$

sustituyendo valores:

$$\sqrt{[x-(h+p)]^2 + (y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-h-p)^2+(y-k)^2}=x-h+p$$

elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando, simplificando y ordenando:

$$(x-h-p)^2+(y-k)^2=(x-h+p)^2$$
$$\cancel{x^2}+\cancel{h^2}+\cancel{p^2}-2hx-2px+2ph+y^2-2ky+k^2=\cancel{x^2}+\cancel{h^2}+\cancel{p^2}-2\cancel{h}x+2px-2ph$$

$$y^2-2ky+k^2=2px+2px-2ph-2ph$$

$$(y-k)^2=4px-4ph$$

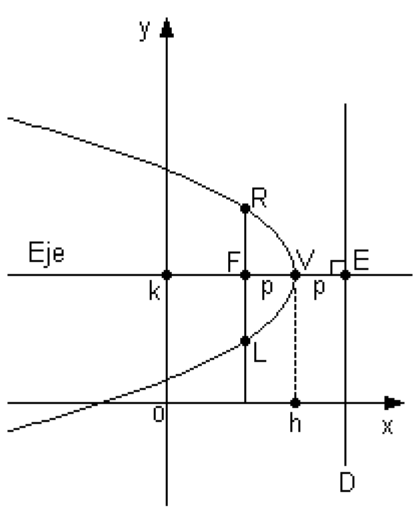
$$\boxed{(y-k)^2=4p(x-h)\quad ;\ p>0}\ \ldots(1)$$

La ecuación (1) es la FORMA ORDINARIA de la parábola con las características siguientes de sus:

ELEMENTOS:

Ecuación del eje focal: $y=k$, ecuación de la directriz "D": $x=h-p$, coordenadas del vértice: $V(h,k)$, coordendas del foco: $F(h+p,k)$ con $p>0$, la cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz es el LADO RECTO (o ancho focal) de la parábola y la denotamos con las letras L y R, como son puntos de la parábola sus coordenadas deben satisfacer su ecuación, o sea que sabemos que su abscisa es $(h+p)$, su ordenada es: sustituyendo en (1) $(y-k)^2=4p(h+p-h)$; $(y-k)^2=4p^2$; $y=k\pm\sqrt{4p^2}$; $y=k\pm2p$, por lo tanto, $L(h+p,k+2p)$ y $R(h+p,k-2p)$.

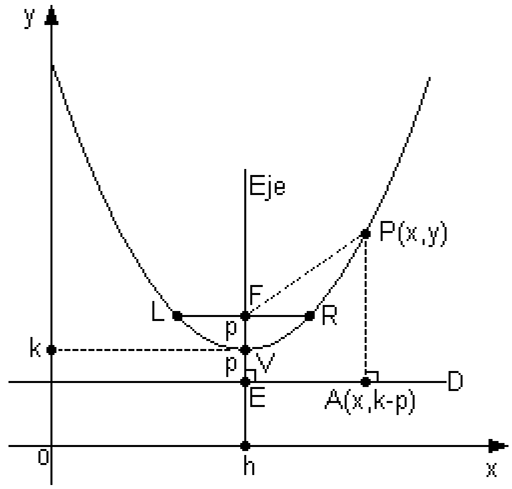
El primer miembro de la ecuación (1) siempre es no negativo (porque esta elevado al cuadrado), por lo tanto, también lo es el segundo miembro, esto nos indica que "x" debe tener el mismo signo que el parámetro "p".



Si el parámetro "p" es negativo $(p<0)$ la ecuación (1) toma la forma:

$$\boxed{(y-k)^2=-4p(x-h)}\ \ldots(2)$$

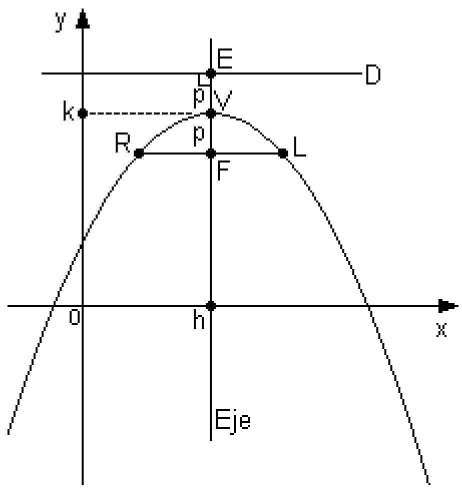
con las mismas características de los elementos de (1) pero sustituyéndoles el parámetro "p" negativo.



Si el eje de la parábola es paralelo al eje "y", procediendo de la misma manera que en la obtención de la ecuación (1), la ecuación de este tipo de parábola es:

$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$; $p > 0$ ...(3)

En donde el eje focal tiene ecuación $x = h$, $F(h, k+p)$, $V(h,k)$, $L(h-2p, k+p)$, $R(h+2p, k+p)$, Directriz: $y = k - p$



Si el parámetro "p" es negativo $(p < 0)$. La ecuación (3) toma la forma:

$$\boxed{(x-h)^2 = -4p(y-k)} \quad ...(4)$$

Con las mismas características de los elementos de (3) pero sustituyéndoles "p" negativo.

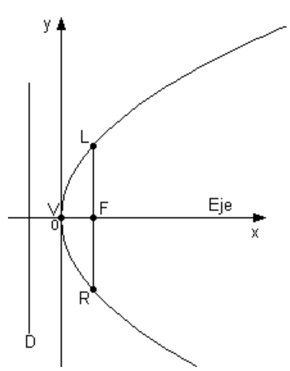
<u>Nota:</u> A modo de identificar con rapidez el tipo de parábola de que se trata conociendo su ecuación, se recomienda <u>no olvidar</u> que si la variable "y" está elevada al cuadrado, la parábola es horizontal (eje paralelo al eje "x") que es el caso de las ecuaciones (1) y (2). Si la variable "x" es la que está elevada al cuadrado, la parábola es vertical (eje paralelo al eje "y") que es el caso de las ecuaciones (3) y (4).

La ecuación de una parábola toma su forma más sencilla cuando su vértice $V(h,k)$ coincide con el origen de coordenadas o sea que $V(0,0)$ y su eje coincide con uno de los ejes coordenados x, y. Por lo anterior, las ecuaciones (1) a la (4) toman la forma (1') a la (4') como sigue:

(1)... $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$(y-0)^2 = 4p(x-0)$

(1')... $\boxed{y^2 = 4px}$



$p > 0$, Ec. eje: $y = 0$

Ec. Directriz: $x = -p$

$V(0,0), F(p,0)$

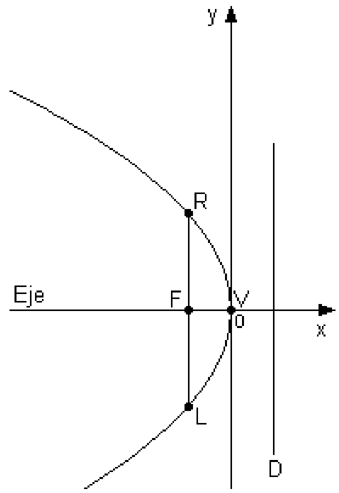
$L(p,2p), R(p,-2p)$

Con las mismas características de los elementos de (1') pero sustituyéndoles el parámetro " p " negativo.

(2)... $(y-k)^2=-4p(x-h)$

$(y-0)^2=-4p(x-0)$

(2')... $\boxed{y^2=-4px}$



$p>0$, Ec. eje: $x=0$

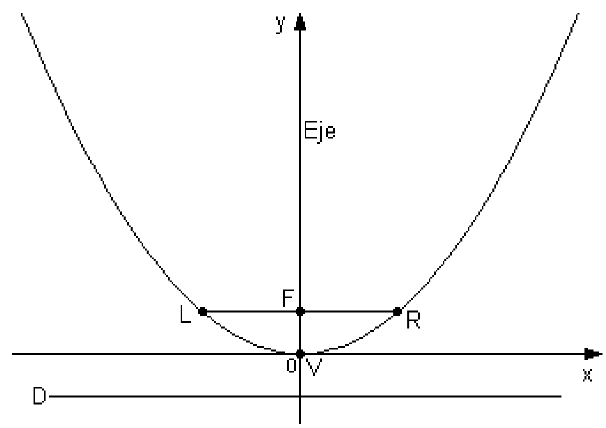
Ec. Directriz: $y=-p$

(3)... $(x-h)^2=4p(y-k)$

(3')... $\boxed{x^2=4py}$ $\quad V(0,0), F(0,p)$

$L(-2p,p), R(2p,p)$

$(x-0)^2=4p(y-0)$



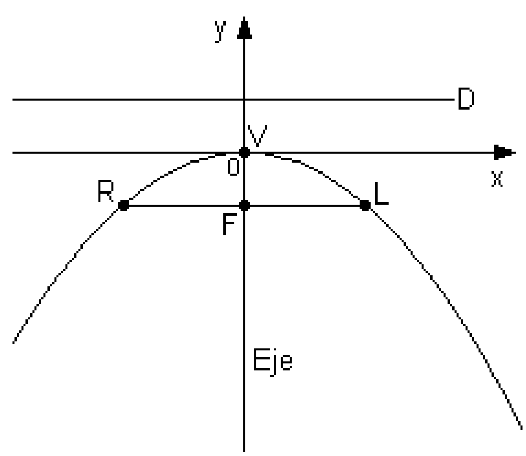
Con las mismas características de los elementos de (3') pero sustituyéndoles el parámetro " p " negativo.

(4)... $(x-h)^2=-4p(y-k)$

$(x-0)^2=-4p(y-0)$

$\boxed{x^2=-4py}$

(4')...



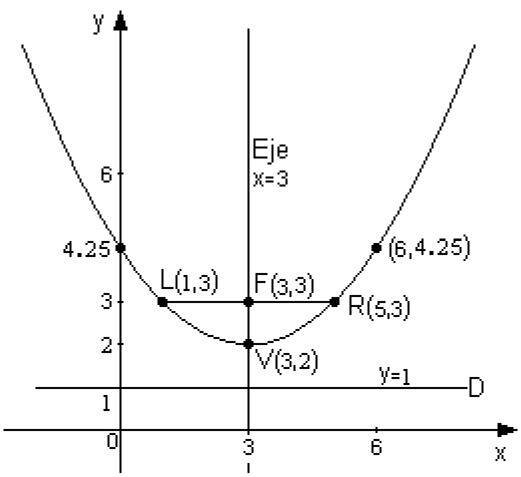
EJEMPLOS

En cada inciso se da la ecuación de una parábola, se pide obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $(x-3)^2 = 4(y-2)$

<u>Solución</u>

Como la variable "x" es la que aparece elevada al cuadrado, sabemos que se trata de una parábola cuyo eje es paralelo al eje "y". La ecuación dada es de la forma (3)••• $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, en donde las coordenadas del vértice son $V(3,2)$, el valor de $4p = 4$, por lo tanto $p = \frac{4}{4} = 1$, con esta información podemos bosquejar rápidamente la gráfica de la parábola y con esta obtener los elementos que faltan como sigue:

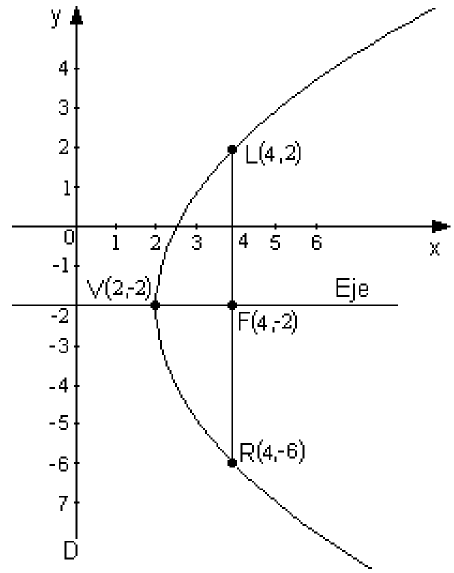


Sobre el sistema de ejes, localizamos el vértice $V(3,2)$, como el parámetro $p = 1$, las coordenadas del foco son $F(3,3)$, a la derecha del foco y a su izquierda también a $2p = 2(1) = 2$ de distancia, las coordenadas de L y R son: $L(1,3)$ y $R(5,3)$, la ecuación del eje es $x = 3$, la ecuación de la directriz "D" es $y = 1$. Si vemos que la curva cruzará alguno de los ejes, es conveniente determinar este valor, que servirá para un mejor bosquejo de la gráfica, en este caso, vemos que cruzará al eje "y" por lo tanto: si $x = 0$, la ecuación dada resulta $(0-3)^2 = 4(y-2)$ despejando la variable "y" se tiene: $9 = 4y - 8$; $17 = 4y$; $y = \frac{17}{4} = 4.25$, se obtiene el punto $\left(0, \frac{17}{4}\right)$ y aprovechando que la parábola es simétrica respecto a su eje, el punto $\left(6, \frac{17}{4}\right)$ también es punto de la parábola, con esto procedemos al bosquejo de su gráfica como se muestra uniendo con línea continua todos los puntos obtenidos.

2) $(y+2)^2 = 8(x-2)$

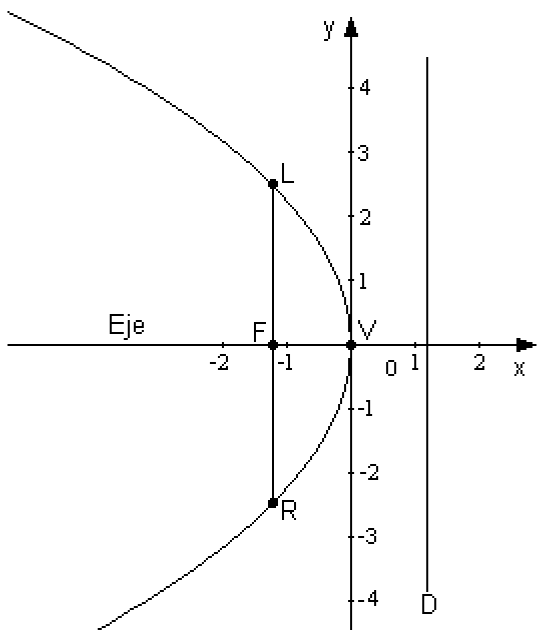
<u>Solución</u>

La ecuación de la parábola es de la forma (1)••• $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, donde podemos ver que el vértice tiene coordenadas $V(2,-2)$, $4p = 8$, por lo tanto $p = \frac{8}{4} = 2$, $2p = 2(2) = 4$, el resto de los elementos de la parábola los obtenemos con la ayuda del bosquejo como en el ejemplo anterior: $F(4,-2)$, $L(4,2)$, $R(4,-6)$, Ecuación eje: $y = -2$, Ecuación directriz "D": $x = 0$.



3) $y^2 = -5x$

<u>Solución</u>

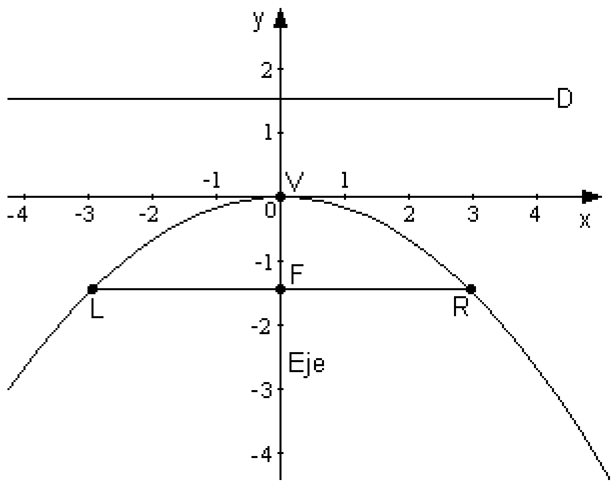


Como la ecuación es de la forma (2') ••• $y^2 = -4px$, su vértice es el origen $V(0,0)$, $-4p = -5$, $p = \frac{5}{4}$, $2p = 2\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2} = 2.5$, $F\left(-\frac{5}{4},0\right)$, $L\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right)$, $R\left(-\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$, Ecuación eje: $y = 0$

Ecuación directriz "D": $x = \frac{5}{4}$

4) $x^2 = -6y$

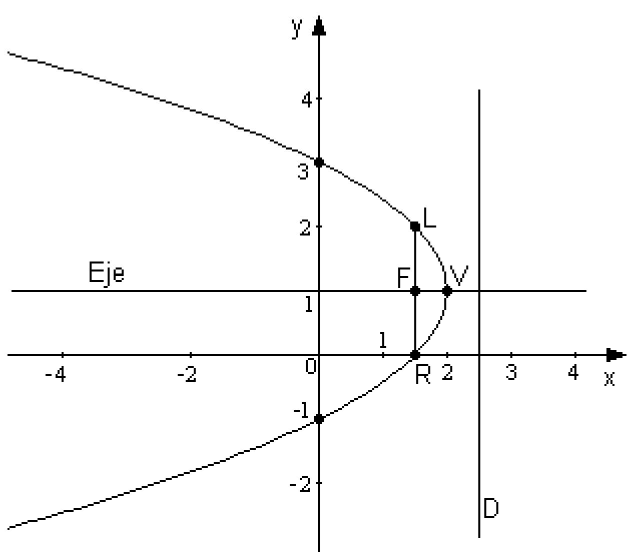
Solución



La ecuación es de la forma $(4')\cdots\ x^2 = -4py$, su vértice es el origen $V(0,0)$, $-4p = -6$, $p = \frac{3}{2}$, $2p = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$, $F\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, $L\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$, $R\left(3,-\frac{3}{2}\right)$, Ecuación eje: $x = 0$, Ecuación directriz "D": $y = \frac{3}{2}$

5) $(y-1)^2 = -2(x-2)$

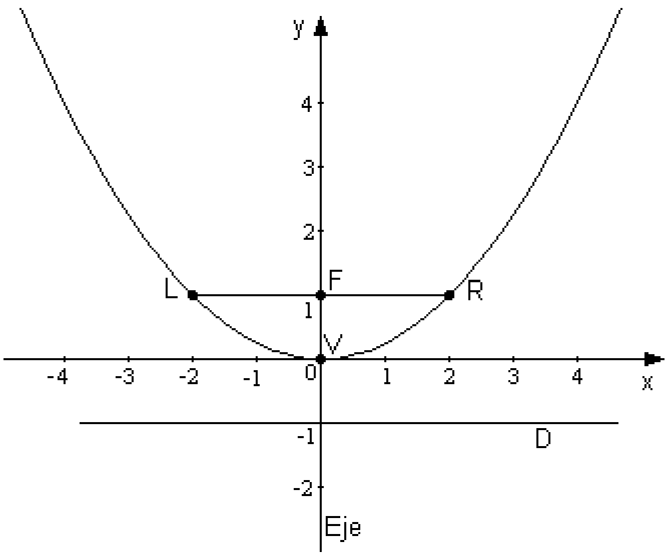
Solución



La ecuación es de la forma $(2)\cdots\ (y-k)^2 = -4p(x-h)$, el vértice tiene coordenadas $V(2,1)$, $-4p = -2$, $p = \frac{1}{2}$, $2p = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $F\left(\frac{3}{2},1\right)$, $L\left(\frac{3}{2},2\right)$, $R\left(\frac{3}{2},0\right)$, Ecuación eje: $y = 1$, Ecuación directriz "D": $x = \frac{5}{2}$, Intersección con el eje "y": si $x = 0$, $(y-1)^2 = -2(0-2)$, $(y-1)^2 = 4$, $y = 1 \pm \sqrt{4}$; $y_1 = 3$, $y_2 = -1$, son dos puntos: $(0,3)$ y $(0,-1)$

6) $x^2 = 4y$

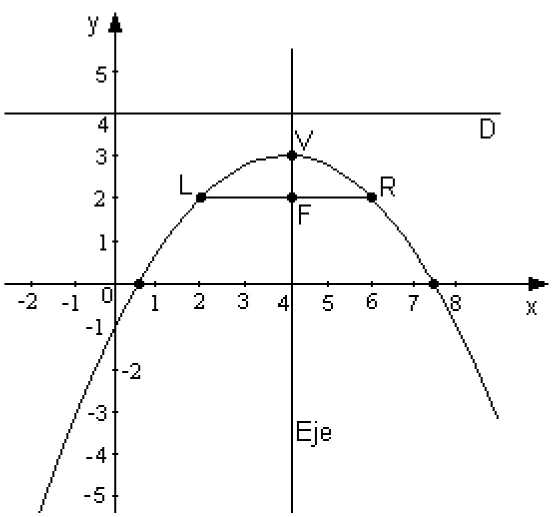
Solución



La ecuación es de la forma (3') ... $x^2 = 4py$, su vértice es el origen $V(0,0)$, $4p = 4$, $p = 1$, $2p = 2(1) = 2$, $F(0,1)$, $L(-2,1)$, $R(2,1)$, Ecuación eje: $x = 0$, Ecuación directriz "D": $y = -1$,

7) $(x-4)^2 = -4(y-3)$

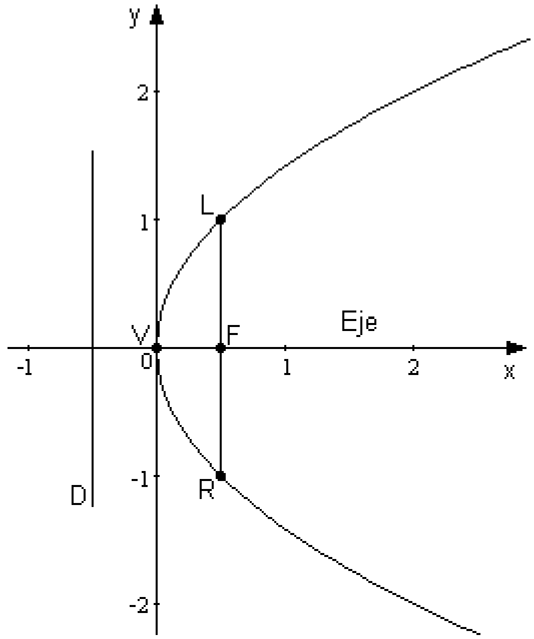
Solución



La ecuación es de la forma (4)... $(x-h)^2 = -4p(y-k)$, el vértice tiene coordenadas $V(4,3)$, $-4p = -4$, $p = 1$, $2p = 2(1) = 2$, $F(4,2)$, $L(2,2)$, $R(6,2)$, Ecuación eje: $x = 4$, Ecuación directriz "D": $y = 4$, Intersección con el eje "x": si $y = 0$, $(x-4)^2 = -4(0-3)$, $(x-4)^2 = 12$, $x = 4 \pm \sqrt{12}$; $x_1 = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7.5$, $x_2 = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.5$, son dos puntos: $\left(4 + 2\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(4 - 2\sqrt{3}, 0\right)$

8) $y^2 = 2x$

Solución



La ecuación es de la forma (1')••• $y^2 = 4px$, su vértice es el origen $V(0,0)$, $4p = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $2p = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $F\left(\frac{1}{2},0\right)$, $L\left(\frac{1}{2},1\right)$, $R\left(\frac{1}{2},-1\right)$, Ecuación eje: $y = 0$, Ecuación directriz "D": $x = -\frac{1}{2}$

EJERCICIOS

En cada inciso se da la ecuación de una parábola en forma ordinaria, obtenga sus elementos y bosqueje su gráfica.

1) $(x+2)^2 = 8(y-4)$

2) $(y-3)^2 = 4(x-2)$

3) $x^2 = -5y$

4) $y^2 = 6x$

5) $(x-1)^2 = -2(y-2)$

6) $y^2 = 4x$

7) $x^2 = 2y$

8) $(y-4)^2 = -4(x-3)$

FORMA GENERAL

Desarrollando las ecuaciones (1)••• $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ y (3)••• $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ se obtiene: $y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$; $x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk = 0$. Las cuales, cambiando su notación se pueden escribir como sigue:

(5)••• $y^2 + Dx + Ey + F = 0$; (6)••• $x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Estas ecuaciones representan la FORMA GENERAL de las parábolas con eje paralelo al eje "x" y al eje "y" respectivamente, con vértice fuera del origen de coordenadas.

Recíprocamente, toda ecuación de una parábola en la forma general como la (5) y la (6) se pueden reducir a su forma ordinaria aplicando el método de completar cuadrados.

- En la ecuación (5) si el coeficiente $D \neq 0$, la parábola tiene su eje paralelo al eje "x". Si $D = 0$, la parábola degenera en un par de rectas reales o imaginarias, paralelas al eje "x".
- En la ecuación (6) si el coeficiente $E \neq 0$, la parábola tiene su eje paralelo al eje "y". Si $E = 0$, la parábola degenera en un par de rectas reales o imaginarias, paralelas al eje "y".

EJEMPLOS

En cada inciso del 1-4 se da la ecuación de una parábola en forma general, obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

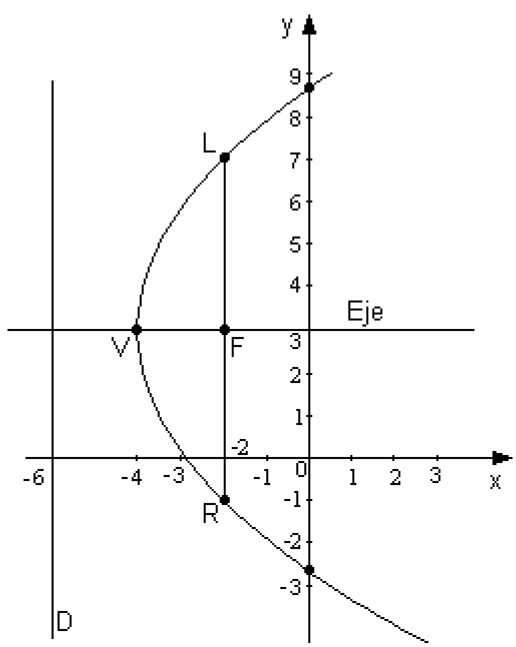
1) $y^2 - 8x - 6y - 23 = 0$

Solución

Aplicando el método de completar cuadrados reduciremos la ecuación dada a su forma ordinaria, con la cual podemos obtener la información pedida, como sigue:

- La ecuación dada se ordena con su término cuadrático: $y^2 - 6y = 8x + 23$

- Se completa cuadrados en el primer miembro:



$$y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 8x + 23 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$y^2 - 6y + (3)^2 = 8x + 23 + (3)^2$$
$$(y-3)^2 = 8x + 32$$

- Se factoriza el segundo miembro:

$$(y-3)^2 = 8(x+4) \quad \text{Forma ordinaria}$$

- Como sabemos, los elementos de la parábola y el bosquejo de su gráfica los podemos obtener con la forma ordinaria:

$V(-4,3)$; $p = 2$; $2p = 4$; $F(-2,3)$; $L(-2,7)$; $R(-2,-1)$

Ec. eje: $y = 3$, Ec. "D": $x = -6$

Intersección con el eje "y": si $x = 0$

$(y-3)^2 = 8(0+4)$; $(y-3)^2 = 32$; $y = 3 \pm \sqrt{32} = 3 \pm 4\sqrt{2}$

$\left(0, 3+4\sqrt{2}\right) \approx (0, 8.7)$; $\left(0, 3-4\sqrt{2}\right) \approx (0, -2.7)$

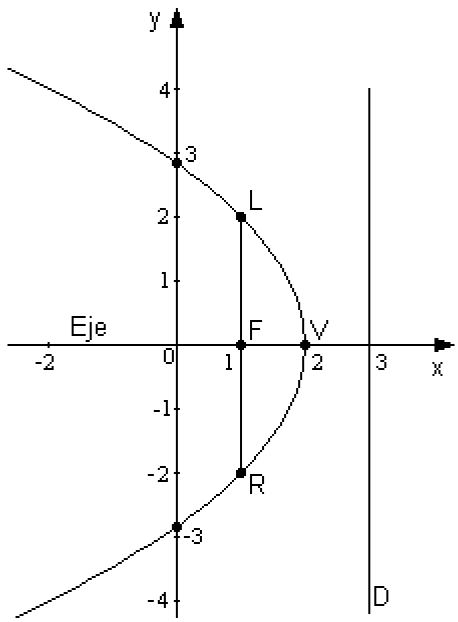
2) $y^2 + 4x - 8 = 0$

Solución

Observando la ecuación dada, la falta del término en "y" nos indica que la parábola (horizontal) tendrá su vértice sobre el eje "x".

- En estos casos, se aisla el término cuadrático en el primer miembro y el resto se transpone al segundo miembro:

$$y^2 = -4x + 8$$



- Factorizando el segundo miembro:

$y^2 = -4(x-2)$ esta es la Forma ordinaria de la parábola, con la cual se resolverá finalmente el problema:

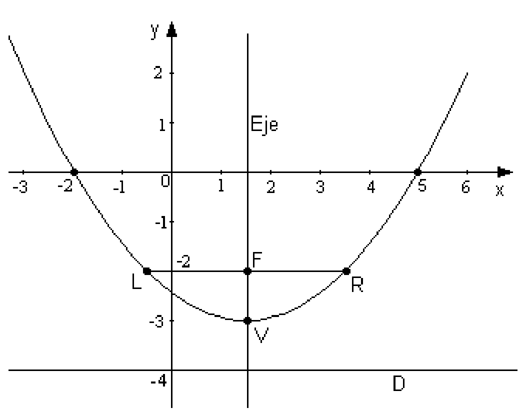
$V(2,0)$, $p = 1$, $2p = 2$
$F(1,0)$, $L(1,2)$, $R(1,-2)$
Ec. eje: $y = 0$, Ec. "D": $x = 3$
Intersección con el eje "y": si $x = 0$
$y^2 = -4(0-2)$; $y^2 = 8$
$y = \pm 2\sqrt{2}$
$(0, 2\sqrt{2}) \approx (0, 2.8)$
$(0, -2\sqrt{2}) \approx (0, -2.8)$

3) $4x^2 - 12x - 16y - 39 = 0$

Solución

Observando la ecuación dada, se refiere a una parábola vertical (eje paralelo al eje "y"), con vértice fuera del origen.

- Primero dividiremos toda la ecuación entre el coeficiente del término cuadrático:



$$\frac{4x^2 - 12x - 16y - 39}{4} = \frac{0}{4}$$

$$x^2 - 3x - 4y - \frac{39}{4} = 0$$

- Se ordena de acuerdo con el término cuadrático: $x^2 - 3x = 4y + \frac{39}{4}$

- Se completa el cuadrado del primer miembro:

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=4y+\frac{39}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \;\; ; \;\; \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=4y+\frac{48}{4}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=4y+12 \;\; ; \;\; \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=4(y+3) \text{ Forma ordinaria}$$

$V\left(\frac{3}{2},-3\right)$, $p=1$, $2p=2$; $F\left(\frac{3}{2},-2\right)$, $L\left(-\frac{1}{2},-2\right)$, $R\left(\frac{7}{2},-2\right)$

Ec. eje: $x=\frac{3}{2}$, Ec. "D": $y=-4$

Intersección con el eje "x": si $y=0$

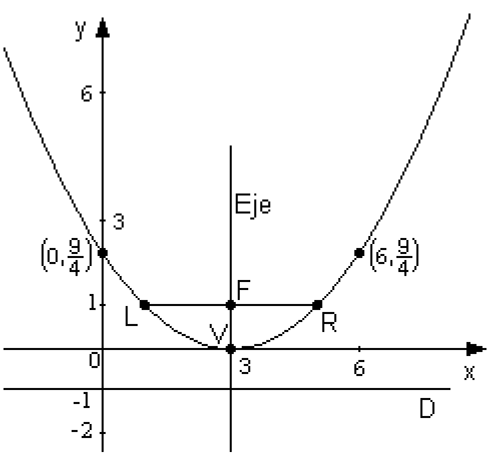
$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=4(0+3)$; $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=12$; $x=\frac{3}{2}\pm 2\sqrt{3}$

$\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3},0\right)\approx(5,0)$; $\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3},0\right)\approx(-2,0)$

4) $x^2-6x-4y+9=0$

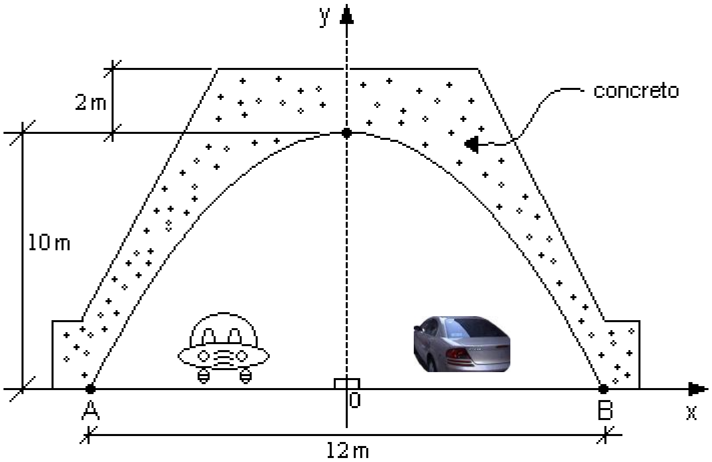
Solución

Insistiendo, es importante desarrollar la capacidad de observación con la información que se da, y no actuar como máquinas automáticas con todos los problemas por resolver, por ejemplo en este caso, si únicamente transponemos el término $-4y$ al segundo miembro: $x^2-6x+9=4y$, el primer miembro ya es un trinomio cuadrado perfecto: $(x-3)^2=4y$, ya que es la forma ordinaria de la ecuación de la parábola y por tanto:



$V(3,0)$, $p=1$, $2p=2$
$F(3,1)$, $L(1,1)$, $R(5,1)$
Ec. eje: $x=3$, Ec. "D": $y=-1$
Intersección con el eje "y": si $x=0$
$(0-3)^2=4y$; $y=\frac{9}{4}$; $\left(0,\frac{9}{4}\right)$
por simetría con el eje, el otro punto es $\left(6,\frac{9}{4}\right)$

5) Se va a construir un túnel en forma de arco parabólico con las dimensiones que se indican en la figura, se pide determinar la ecuación de la parábola con respecto a los ejes coordenados que se muestran.



Solución

Se observa en la figura que el vértice tiene coordenadas $V(0,10)$ y que la parábola es vertical cuya ecuación es de la forma (4) ••• $(x-h)^2 = -4p(y-k)$.

- Los puntos A y B tiene coordenadas $A(-6,0)$ y $B(6,0)$.
- Sustituyendo las coordenadas del vértice en la ecuación (4):

$(x-0)^2 = -4p(y-10)$

$x^2 = -4p(y-10)$ ••• (a)

- Los puntos A y B están sobre la parábola, por lo tanto, sus coordenadas satisfacen la ecuación (a): Sea $A(-6,0)$ entonces $(-6)^2 = -4p(0-10)$; $36 = 40p$; $p = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$, sustituyendo este valor de "p" en la ecuación (a) se obtiene $x^2 = -4\left(\frac{9}{10}\right)(y-10)$; $x^2 = -\frac{18}{5}(y-10)$ que es la ecuación de la parábola en forma ordinaria y desarrollándola se obtiene la forma general $5x^2 + 18y - 180 = 0$

EJERCICIOS

En los incisos del 1-4 se da la ecuación de una parábola en la forma general, se pide obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $x^2 + 8x + 6y + 22 = 0$

2) $x^2 + 4x + 4 = 0$

3) $x^2 - 4y + 8 = 0$

4) $y^2 + 4y + 6x - 5 = 0$

5) El diámetro de una antena parabólica es de $12[m]$ y su profundidad es de $4[m]$, obtenga la localización de su foco.

9.4. ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA BAJO CIERTAS CONDICIONES, CON EJE PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS

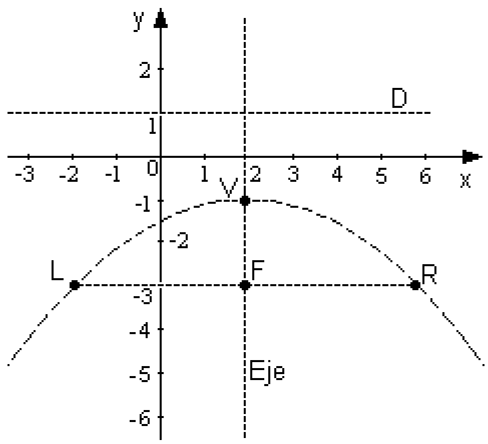
En esta sección trataremos algunos problemas donde se pide obtener la ecuación de una parábola horizontal o vertical, sujeta a ciertas condiciones que se dan previamente.

El procedimiento que se recomienda en todos los casos, consiste en graficar primero toda la información que se da, con la finalidad de elaborar la estrategia de solución que se propone en cada uno de los siguientes:

EJEMPLOS

1) Obtener la ecuación de la parábola vertical cuyo vértice es $V(2,-1)$ y foco $F(2,-3)$.

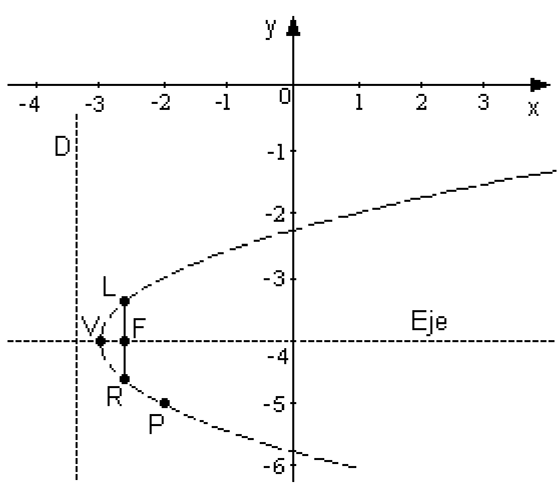
Solución



- De acuerdo con la representación gráfica de la información dada, la ecuación de la parábola es de la forma: (4)••• $(x-h)^2=-4p(y-k)$.
- Con la magnitud de $VF=p=2$ y las coordenadas del $V(2,-1)$, sustituyéndolas en (4) se tiene: $(x-2)^2=-4(2)(y+1)$; $(x-2)^2=-8(y+1)$ que es la ecuación de la parábola en forma ordinaria y desarrollándola: $x^2-4x+8y+12=0$ es su forma general.

2) Obtener la ecuación de la parábola horizontal cuyo vértice es $V(-3,-4)$ y pasa por el punto $P(-2,-5)$.

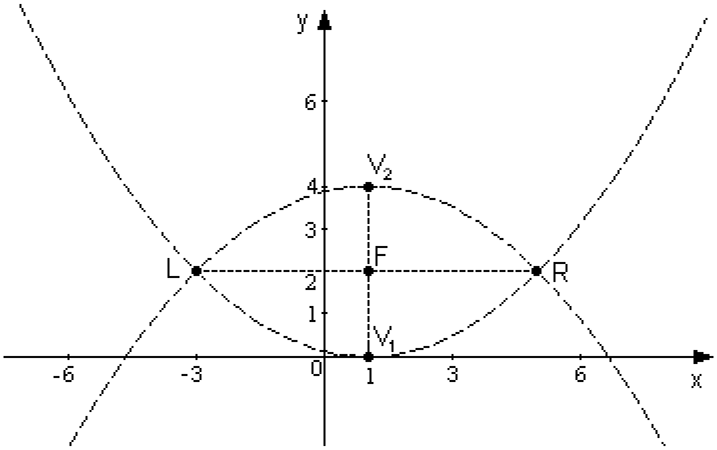
Solución



Representando gráficamente la información dada, la ecuación de la parábola es de la forma
(1)••• $(y-k)^2=4p(x-h)$.
- Sustituyendo las coordenadas del vértice $V(-3,-4)$ en la ecuación (1): $(y+4)^2=4p(x+3)$ •••(a).
- Si el punto $P(-2,-5)$ está sobre la parábola, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (a): $(-5+4)^2=4p(-2+3)$; $1=4p(1)$; $p=\frac{1}{4}$, sustituyendo este valor en la ecuación (a) $(y+4)^2=4\left(\frac{1}{4}\right)(x+3)$; la ecuación en forma ordinaria: $(y+4)^2=(x+3)$, desarrollándola, la ecuación en forma general: $y^2-x+8y+13=0$.

3) Hallar la ecuación de la parábola cuyos extremos del lado recto (LR) son los puntos $L(-3,2)$, $R(5,2)$.

Solución



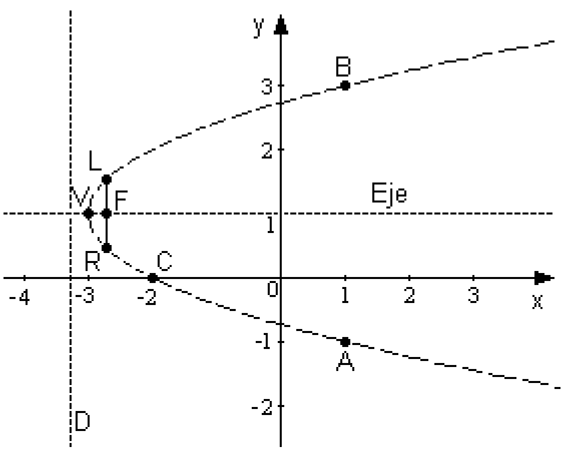
- Graficando la información dada, la ecuación de la parábola es de la forma (3) y (4) o sea: $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$ (2 parábolas verticales pueden cumplir con la información dada).
- Como la magnitud de $LR = 4p = 8$; $p = 2$.
- El foco es el punto medio del segmento LR:

$$F\left(\frac{x_R + x_L}{2}, \frac{y_R + y_L}{2}\right) = \left(\frac{5-3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1,2)$$

- Las coordenadas de los 2 vértices son: $V_1(1,0)$ y $V_2(1,4)$.
- Las ecuaciones en forma ordinaria son: con $V_1(1,0)$: $(x-1)^2 = 4(2)(y-0)$; $(x-1)^2 = 8y$

con $V_2(1,4)$: $(x-1)^2 = -4(2)(y-4)$; $(x-1)^2 = -8(y-4)$.

4) Determinar la ecuación de la parábola horizontal que pasa por los 3 puntos no colineales $A(1,-1)$, $B(1,3)$ y $C(-2,0)$.



Solución

- Representando gráficamente la información, la ecuación de la parábola debe ser de la forma: (1)••• $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ o bien $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ •••(5).
- Como los puntos A, B y C son de la parábola, sus coordenadas deben satisfacer su ecuación, por lo tanto, sustituyendo las coordenadas de cada punto en la ecuación (5) se tiene:

con $A(1,-1)$: $(-1)^2 + D(1) + E(-1) + F = 0$

$$D - E + F = -1 \quad \text{•••(a)}$$

con: $B(1,3)$: $(3)^2 + D(1) + E(3) + F = 0$

$$D + 3E + F = -9 \quad \text{•••(b)}$$

con: $C(-2,0)$: $(0)^2 + D(-2) + E(0) + F = 0$

$$-2D \quad + F = 0 \quad \text{•••(c)}$$

- Las ecuaciones (a), (b) y (c) forman un sistema de 3 ecuaciones lineales, cuya solución nos dará los valores de D, E y F:

$$\begin{cases} D - E + F = -1 & \text{•••(a)} \\ D + 3E + F = -9 & \text{•••(b)} \\ -2D \quad + F = 0 & \text{•••(c)} \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 0 + 6 + 0 + 1 = 12$$

$$D=\frac{\Delta_D}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\ -9 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}{12}=\frac{-3+0+0+0+0-9}{12}=\frac{-12}{12}=-1\ ;\ \boxed{D=-1}$$

Sustituyendo el valor de $D=-1$ en la ecuación (c):

$$-2(-1)+F=0\ ;\ \boxed{F=-2}$$

Sustituyendo los valores de $D=-1$ y $F=-2$ en cualquiera de las ecuaciones (a) o (b); sea en (a): $(-1)-E-2=-1$; $\boxed{E=-2}$.

Sustituyendo los valores de $D=-1$, $E=-2$ y $F=-2$ en la ecuación (5), se tiene:

$\boxed{y^2-x-2y-2=0}$ es la ecuación de la parábola en forma general.
Y completando cuadrados se tiene: $(y-1)^2=(x+3)$ forma ordinaria, con elementos: $V(-3,1)$, $p=\frac{1}{4}$, $F\left(-\frac{11}{4},1\right)$, $L\left(-\frac{11}{4},\frac{3}{2}\right)$, $R\left(-\frac{11}{4},\frac{1}{2}\right)$, Ec. eje: $y=1$, Ec. "D": $x=-\frac{13}{4}$

5) El mismo problema del inciso **4)** lo resolveremos ahora aplicando el determinante:

$$\begin{vmatrix}y^2 & y & x & 1\\ y_A^2 & y_A & x_A & 1\\ y_B^2 & y_B & x_B & 1\\ y_C^2 & y_C & x_C & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y^2 & y & x & 1\\ (-1)^2 & -1 & 1 & 1\\ (3)^2 & 3 & 1 & 1\\ (0)^2 & 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y^2 & y & x & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 9 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$$

Por el método de menores y cofactores, como ya lo hemos hecho anteriormente:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & + & - & + & - \\
+ & y^2 & y & x & 1\\
- & 1 & -1 & 1 & 1\\
+ & 9 & 3 & 1 & 1\\
- & 0 & 0 & -2 & 1
\end{array}=0 \quad ; \quad y^2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=y^2(-1-6+0+0-2-3)=-12y^2$$

$$-y\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 9 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=-y(1-18+0+0+2-9)=24y \quad ; \quad x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 9 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=x(3+0+0+0+0+9)=12x$$

$$-1\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 9 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=-1(-6+0+0+0+0-18)=24$$

Sumando estos resultados: $-12y^2+24y+12x+24=0$, dividiendo entre -12:

$$\frac{-12y^2+24y+12x+24}{-12}=\frac{0}{-12}$$

$\boxed{y^2-2y-x-2=0}$ Forma general

EJERCICIOS

1) Obtener la ecuación de la parábola horizontal cuyo vértice es el punto $V(-1,-3)$ y su foco $F(-2,-3)$.
2) Encuentre la ecuación de la parábola vertical cuyo vértice es $V(1,-1)$ y pasa por el punto $P(3,1)$.
3) Hallar la ecuación de la parábola horizontal cuyos extremos del lado recto (LR) son los puntos $L(-1,1)$, $R(-1,-5)$.

Determinar la ecuación de la parábola vertical que pasa por los 3 puntos no colineales $A(2,-1)$, $B(4,0)$ y $C(5,3)$:

4) Aplicando el método del ejemplo **4)**.
5) Aplicando el método del ejemplo **5)**.

9.5. ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA CON EJE FOCAL OBLICUO A LOS EJES COORDENADOS

Esta parte está relacionada con la sección 7.5 (capítulo VII) y se recomienda leerlo nuevamente, con objeto de lograr una mejor comprensión de lo que se expondrá.

Recordar que en la ecuación general de segundo grado $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, si el valor del discriminante es cero, o sea que $B^2-4AC=0$, la cónica que representa esta ecuación es una parábola oblicua respecto a los ejes coordenados x, y (o como caso degenerado, un par de rectas paralelas o coincidentes). La presencia del término Bxy en la ecuación, hace un poco más difícil la construcción de la gráfica de la parábola.

Citaremos 2 procedimientos para graficar una ecuación de una parábola oblicua (con término en xy).

Primer Procedimiento

- Dada la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, verificar que $B^2-4AC=0$, para estar seguros de que la cónica es una parábola.

- El término Bxy se anulará obteniendo el ángulo agudo "α" de rotación de los ejes:

Con la expresión $\tan 2\alpha = \dfrac{B}{A-C}$

Si $A \neq C$ y considerando que "α" es agudo, podemos conocer el valor de $\cos 2\alpha$, para que a partir de las identidades trigonométricas $sen\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ se puedan obtener las fórmulas de rotación de los ejes: $x = x'\cos\alpha - y' sen\alpha$; $y = x' sen\alpha + y'\cos\alpha$.

Si $A = C$, el ángulo de rotación de los ejes es $\alpha = 45^0$ (ver sección 7.5), con este valor, $sen45^0 = \cos 45^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y las fórmulas de rotación de los ejes son: $x = x'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$; $y = x'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + y'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$.

- Al sustituir las fórmulas de rotación de los ejes en la ecuación dada $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, desarrollando, simplificando e ignorando los términos en x', y' que sumarán cero, se obtendrá una nueva ecuación en x', y' sin el término en $x'y'$ y cuyo eje de la parábola será paralelo al nuevo sistema coordenado x', y'.

- Con la ecuación obtenida en el paso anterior se procede completando cuadrados para determinar las fórmulas de traslación $x' = x'' + h$, $y' = y'' + k$, logrando con esto que el vértice de la parábola coincida con el origen del nuevo sistema coordenado x'', y''.

Segundo Procedimiento

Llamaremos a este procedimiento "suma de ordenadas".

- Verificar que el discriminante $B^2 - 4AC$ de la ecuación dada $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, sea cero, para saber que se trata de una parábola.

- Despejar la variable "y" de la ecuación dada, la expresión que se obtiene será de la forma $y = y_1 \pm y_2$, en donde y_1 es un diámetro de la parábola (lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas); $\pm y_2$ se le llama "ordenada sobre el diámetro".

- Por último, se construye una tabla para calcular algunos puntos de la parábola, que al unirlos con línea continua se obtendrá un bosquejo de la gráfica de la curva.

EJEMPLOS

En cada inciso, se pide bosquejar la gráfica de la ecuación dada.

1) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 29x - 8y + 54 = 0$

<u>Solución</u>

Aplicando el segundo procedimiento:

- Calculamos el discriminante $B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$, se trata de una parábola.
- Despejamos la variable "y": se ordena de la siguiente manera $4y^2 - (4x+8)y + x^2 + 29x + 54 = 0$, en donde se tiene que: $a = 4$, $b = -(4x+8)$ y $c = x^2 + 29x + 54$ y aplicando la fórmula general $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$y = \frac{4x + 8 \pm \sqrt{(-4x-8)^2 - 4(4)(x^2 + 29x + 54)}}{2(4)} = \frac{4x + 8 \pm \sqrt{16x^2 + 64x + 64 - 16x^2 - 464x - 864}}{8}$$

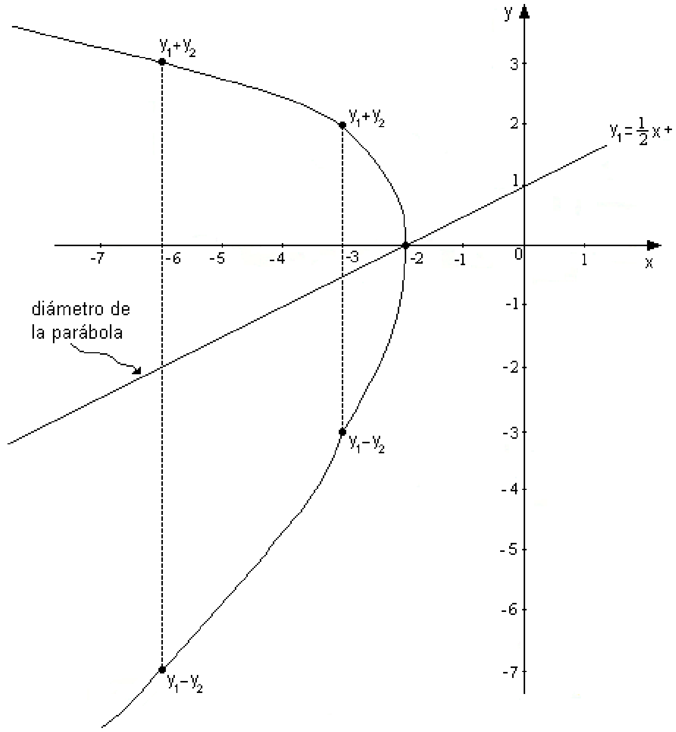
$$y = \frac{4x + 8 \pm \sqrt{-400x - 800}}{8} = \frac{4x + 8 \pm 20\sqrt{-x-2}}{8}$$

(a)••• $\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \frac{5}{2}\sqrt{-x-2}}$, esta expresión consta de dos partes: $y = y_1 \pm y_2$; $y_1 = \frac{1}{2}x + 1$ (diámetro de la parábola), $y_2 = \pm\frac{5}{2}\sqrt{-x-2}$ (ordenada contada sobre el diámetro).

- Se construye la siguiente tabla:
  Si el dominio de la expresión (a) es de tal modo que $-x - 2 \geq 0$ donde $x \leq -2$, por lo tanto, Dominio $= (-\infty, -2]$, damos valores a "x" de acuerdo al dominio:

- Para bosquejar la gráfica de la parábola, primero graficamos su diámetro $y_1 = \frac{1}{2}x + 1$, luego los puntos calculados en la tabla y uniéndolos con línea continua:

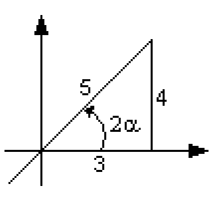
x	-2	-3	-6	•••
y_1	0	$-\frac{1}{2}$	-2	•••
$\pm y_2$	0	$\pm\frac{5}{2}$	± 5	•••
* $y_1 + y_2$	0	2	3	•••
* $y_1 - y_2$	0	-3	-7	•••



2) Al mismo ejemplo del inciso anterior $x^2-4xy+4y^2+29x-8y+54=0$, apliquemos el primer procedimiento:

- Ya sabemos que $B^2-4AC=0$ y se trata de una parábola.

- Como $A=1$ y $C=4$, $A\neq C$ entonces $\tan 2\alpha=\dfrac{B}{A-C}=\dfrac{-4}{1-4}=\dfrac{4}{3}$



como "α" es agudo y $\tan 2\alpha=\dfrac{4}{3}$, entonces $\cos 2\alpha=\dfrac{3}{5}$ y las identidades

$$sen\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ;\ \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\alpha=sen^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=26.6^0$, es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas de rotación son: $x=x'\cos\alpha-y'sen\alpha=x'\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)-y'\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $x=\dfrac{2x'-y'}{\sqrt{5}}$ ••• (a)

$y=x'sen\alpha+y'\cos\alpha=x'\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)+y'\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $y=\dfrac{x'+2y'}{\sqrt{5}}$ ••• (b)

- Sustituyendo las expresiones (a) y (b) en la ecuación dada, desarrollando, simplificando e ignorando los términos en $x'y'$ que sumarán cero:

$$x^2-4xy+4y^2+29x-8y+54=0$$

$$\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)^2-4\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)+4\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2+29\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)-8\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)+54=0$$

$$5y'^2+\frac{50}{\sqrt{5}}x'-\frac{45}{\sqrt{5}}y'+54=0$$; dividiendo entre 5

$$y'^2+\frac{10}{\sqrt{5}}x'-\frac{9}{\sqrt{5}}y'+\frac{54}{5}=0 \quad \cdots(c)$$

La expresión (c) ya no contiene el término en $x'y'$, es la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al sistema de coordenadas x', y'.

- Completando cuadrados en la ecuación (c) se determinarán las fórmulas de traslación $x'=x''+h$, $y'=y''+k$:

$$y'^2-\frac{9}{\sqrt{5}}y'+\left(\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{10}{\sqrt{5}}x'-\frac{54}{5}+\left(\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\left(y'-\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{10}{\sqrt{5}}x'-\frac{135}{20}$$

$$\left(y'-\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2=-2\sqrt{5}\left(x'+\frac{27}{8\sqrt{5}}\right) \quad \cdots(d)$$

En la ecuación (d), el vértice de la parábola es $V(h,k)=\left(-\frac{27}{8\sqrt{5}},\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)$ entonces, las fórmulas de traslación son: $x'=x''-\frac{27}{8\sqrt{5}}$, $y'=y''+\frac{9}{2\sqrt{5}}$; sustituyéndolas en la ecuación (d) resulta:

$$\left(y''+\frac{9}{2\sqrt{5}}-\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2=-2\sqrt{5}\left(x''-\frac{27}{8\sqrt{5}}+\frac{27}{8\sqrt{5}}\right)$$

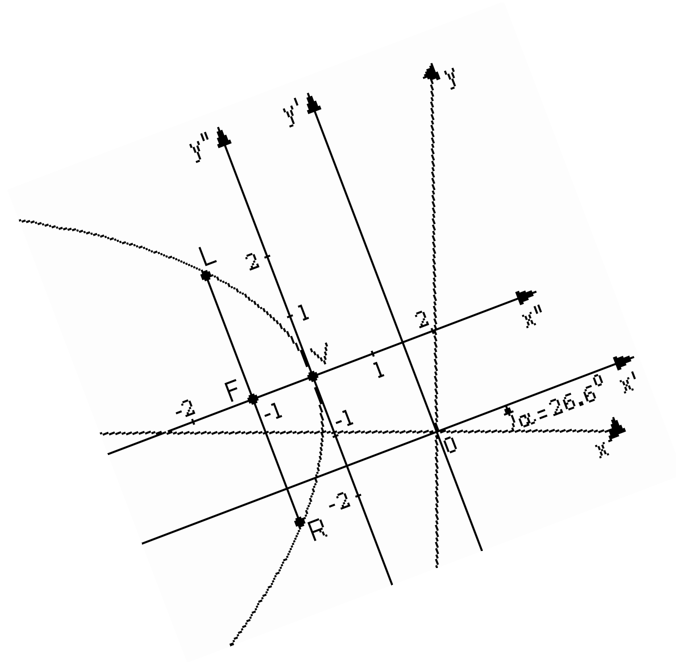
$$\boxed{y''^2=-2\sqrt{5}x''} \quad \cdots(e)$$

La ecuación (e) es de la forma simplificada de la ecuación de la parábola dada originalmente, cuyo vértice coincide con el origen del nuevo sistema x'', y''.

$-4p = -2\sqrt{5}$

$p = \dfrac{-2\sqrt{5}}{-4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.1$

$2p \approx 2.2$



3) $x^2 - 4xy + 4y^2 - x = 0$

<u>Solución</u>

Aplicando el segundo procedimiento:

- $B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$, se trata de una parábola.
- Despejando la variable " y " de la ecuación dada:

  se ordena la ecuación $4y^2 - 4xy + x^2 - x = 0$ $\begin{cases} a = 4 \\ b = -4x \\ c = x^2 - x \end{cases}$

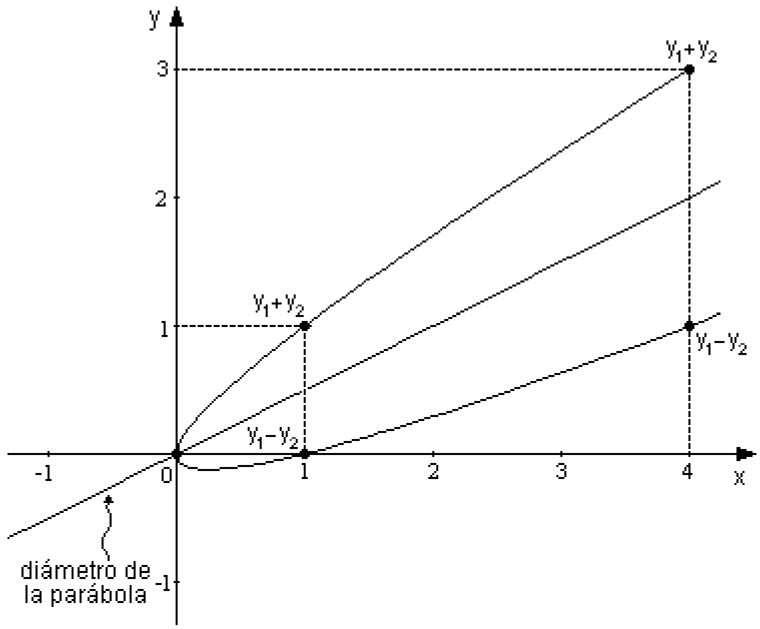
si $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{4x \pm \sqrt{(-4x)^2 - 4(4)(x^2 - x)}}{2(4)} = \dfrac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 16x^2 + 16x}}{8}$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2}\sqrt{x}}$$

$y_1 = \dfrac{1}{2}x$ (diámetro de la parábola)

$y_2 = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ (ordenada contada sobre el diámetro de la parábola)

- Se dibuja primero el diámetro de la parábola, se construye una tabla para obtener algunos puntos de la parábola y bosquejarla.



x	0	1	4	9	•••
y_1	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	•••
$\pm y_2$	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm\frac{3}{2}$	•••
y_1+y_2	0	1	3	6	•••
y_1-y_2	0	0	1	3	•••

$$Dominio = [0, \infty)$$

4) $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

<u>Solución</u>

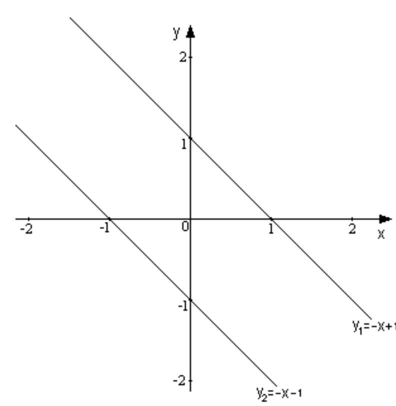
Se aplicará el segundo procedimiento:

- $B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$, se trata de una parábola.
- Despejando la variable “ y ” de la ecuación dada:

  se ordena la ecuación $y^2 + 2xy + x^2 - 1 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2x \\ c = x^2 - 1 \end{array} \right.$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4(1)(x^2 - 1)}}{2(1)} = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^2 + 4}}{2}$$

$$\boxed{y = -x \pm 1}$$



En este caso, la parábola degenera en dos rectas paralelas:
$y_1 = -x + 1$; $y_2 = -x - 1$

5) $x^2 + 2xy + y^2 - x + 5y + 4 = 0$

Solución

Aplicando el primer procedimiento:

- $B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$, es una parábola.
- Como $A = C$, $1 = 1$, el ángulo de rotación de los ejes es $\alpha = 45^0$, por lo tanto las fórmulas de rotación de los ejes son:

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \;;\; y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

- Sustituyendo las fórmulas anteriores en la ecuación dada, desarrollando, simplificando e ignorando los términos en $x'y'$ que suman cero:

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 4 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right)x'^2 + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' + \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0$$

$$2x'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' + \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 4 = 0 \text{ ; dividiendo entre 2}$$

$$x'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' + \frac{3}{\sqrt{2}}y' + 2 = 0 \text{ ; completando cuadrados}$$

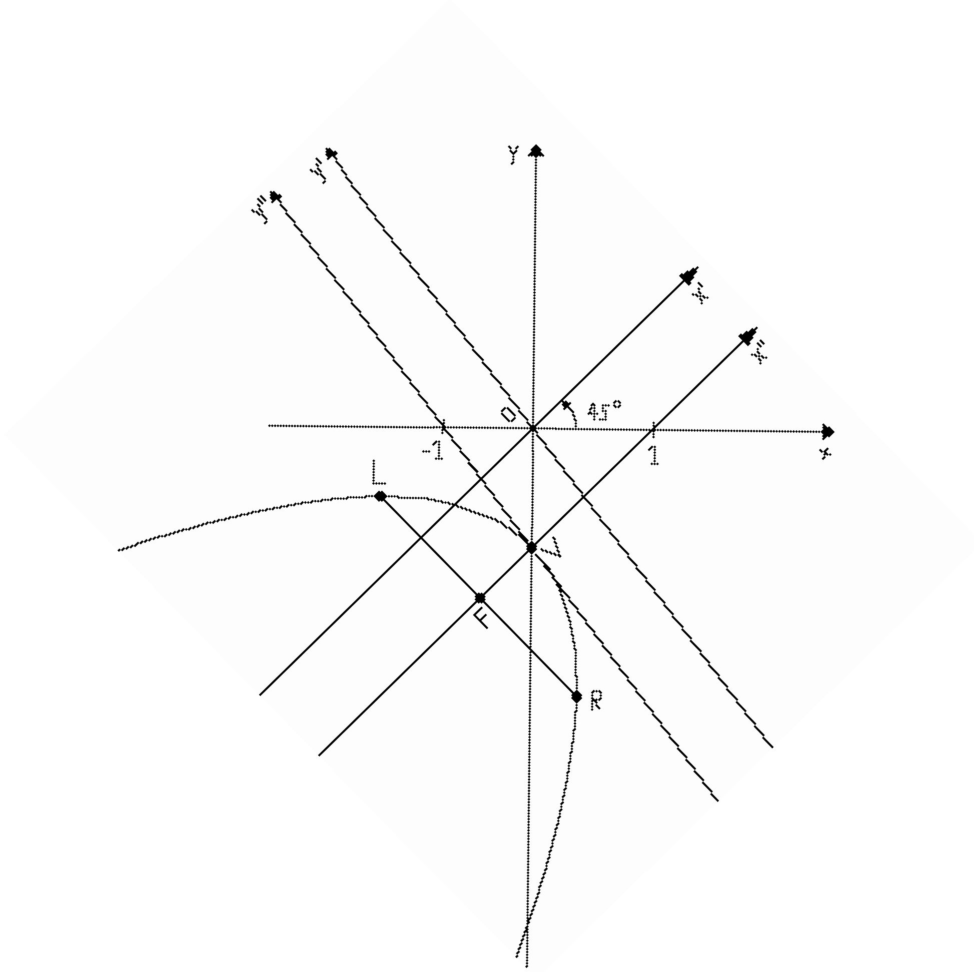
$$\left(x'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}}y' - 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \;;\; \left(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}y' - \frac{3}{2}$$

(a)••• $\left(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; como el vértice de esta ecuación es: $V\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, las fórmulas de traslación de los ejes son:

$x' = x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y' = y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}$ que al sustituirlos en la ecuación (a) se tiene $\left(x'' - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}\left(y'' - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\boxed{x''^2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}y''} \text{ •••(b)} \quad ; \quad p = \frac{3}{4\sqrt{2}} \approx 0.5$$

La ecuación (b) es la forma simplificada de la ecuación de la parábola dada, cuyo vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas x'', y''.



EJERCICIOS

En cada inciso, hay que bosquejar la gráfica de la ecuación dada aplicando el procedimiento que se indica.

1) $x^2 - 4xy + 4y^2 - x = 0$, aplique el primer procedimiento.

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y + \frac{1}{4} = 0$, aplique el segundo procedimiento.

3) $9x^2 - 6xy + y^2 - x = 0$, aplique el primer procedimiento.

4) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 16x - 24y + 3 = 0$, aplique el segundo procedimiento.

5) $9x^2 - 6xy + y^2 + x - 2y - 14 = 0$, aplique el segundo procedimiento.

X. LA ELIPSE

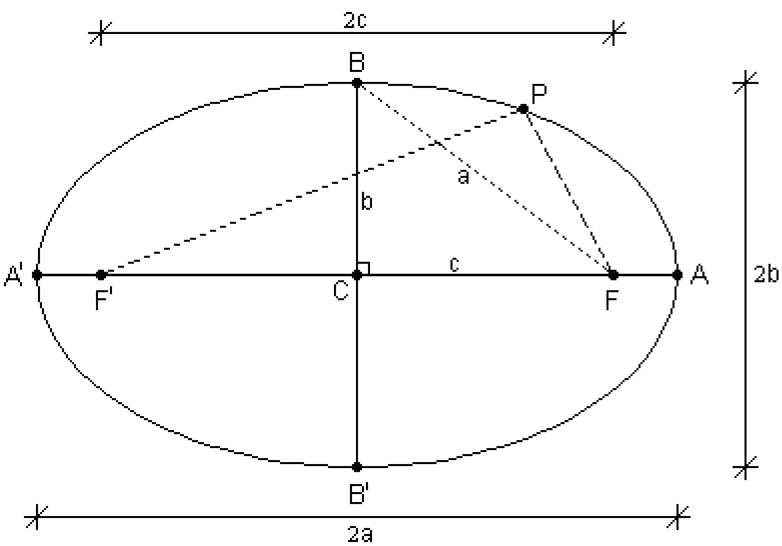
Objetivos: Que el alumno:

1. Conozca los diferentes elementos que componen a una elipse.
2. Identifique a una elipse geométricamente en su forma horizontal y vertical con centro en el origen y fuera de el.
3. Reconozca las ecuaciones ordinaria y general de una elipse con centro en el origen y fuera de el.
4. Resuelva ejercicios de elipse, a partir de sus formas ordinaria y general, con centro y fuera del origen, para que sea capaz de interpretarlas analíticamente y geométricamente.
5. Resuelva ejercicios de elipse, a partir de condiciones geométricas, con centro y fuera del origen, para que sea capaz de obtener sus principales elementos.

10.1. DEFINICIÓN DE ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Definición

Se llama elipse al lugar geométrico de un punto "P" que se mueve en el plano, de tal modo que la suma de las distancias del punto "P" a dos puntos fijos F' y F (llamados focos), mantienen la suma constante.



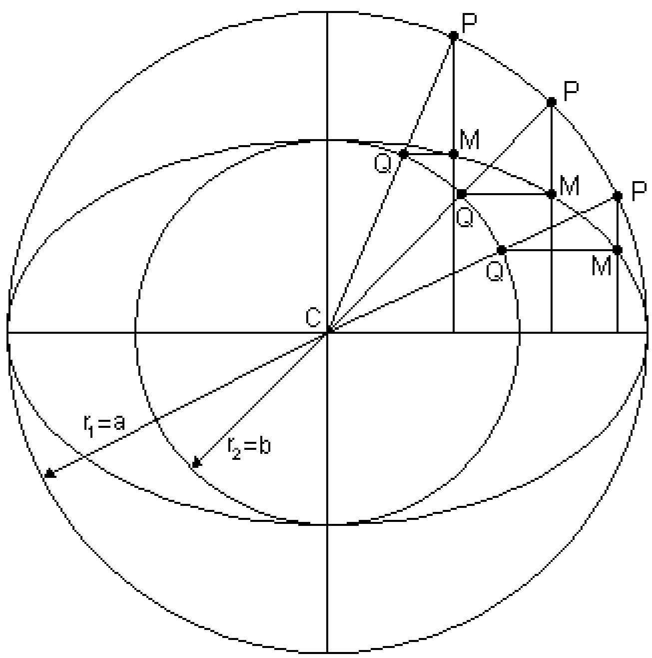
- Siendo "P" un punto arbitrario de la elipse, se conviene indicar la suma constante como $PF'+PF = 2a$.
- La recta que contiene a los focos F' y F se llama EJE FOCAL o EJE MAYOR de la elipse.
- La recta que pasa por el punto medio del segmento $F'F$ y es perpendicular a el, se llama EJE MENOR de la elipse.
- El punto donde se cortan el eje mayor y el eje menor es el CENTRO "C" de la elipse.
- Los puntos en los que la elipse corta a sus ejes A, A', B y B' se llaman VÉRTICES de la elipse.

- Magnitudes: Eje mayor $AA' = 2a$; Eje menor $BB' = 2b$; Semieje mayor $CA = a$; Semieje menor $CB = b$; Distancia focal $F'F = 2c$; Por el teorema de Pitágoras en el triángulo CFB se tiene $a^2 = b^2 + c^2$; $b^2 = a^2 - c^2$ luego $a > b$.

10.2. CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE CON REGLA Y COMPÁS

Una forma de construir una elipse con regla y compás puede lograrse siguiendo el siguiente procedimiento:

a) Se suponen conocidos los semiejes mayor “a” y menor “b”.



b) Se trazan 2 circunferencias con centro común al de la elipse, de radios $r_1 = a$ y $r_2 = b$.

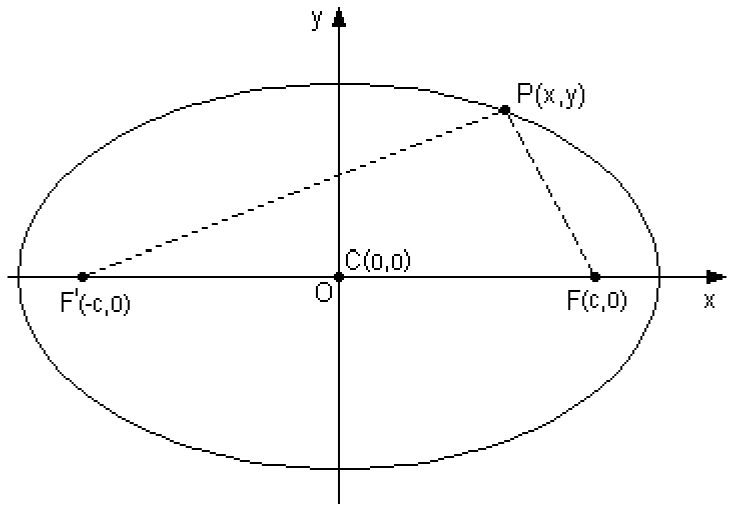
c) Por el centro de la elipse “C” se trazan varios radios que cortarán a las 2 circunferencias en los puntos P y Q.

d) Por los puntos P se trazan rectas paralelas al eje menor y por los puntos Q rectas paralelas al eje mayor, el punto de cruce ”M” de estas rectas paralelas, son puntos de la elipse.

e) Repitiendo el paso anterior tantas veces como se crea conveniente, se tendrán tantos puntos de la elipse que al unirlos con línea continua se obtendrá un bosquejo bastante aceptable de la curva.

10.3. FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE

10.3.1. ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS



- Eje focal coincidiendo con el eje "x". Siendo $FF' = 2c$, las coordenadas de F' y F son: $F'(-c,0)$, $F(c,0)$.

  Si el punto $P(x,y)$ es un punto arbitrario de la elipse, se debe cumplir por definición que $PF' + PF = 2a$.

  Aplicando la fórmula de la distancia entre 2 puntos del plano:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a \quad \cdots (1)$$

La expresión (1) representa la ecuación de la elipse con las características antes expuestas, para hallar una forma más simple de esta ecuación, se efectúan operaciones algebraicas como sigue: aislando el primer radical y elevando al cuadrado ambos miembros

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-(x+c)^2-y^2+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx \;;\; a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$\left[a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2=\left(a^2-cx\right)^2$$

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right) \text{ ; como } b^2 = a^2 - c^2$$

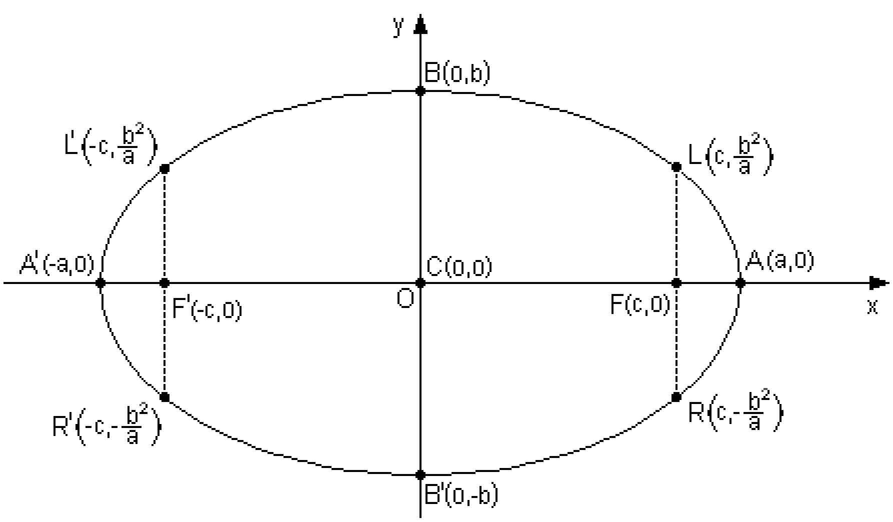
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ ; dividiendo la ecuación entre } a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \cdots (2)$$

La ecuación (2) es la FORMA ORDINARIA de la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal sobre el eje "x".

Los ELEMENTOS de la elipse de ecuación (2) referidos al sistema de coordenadas x, y son:



La cuerda que pasa por cada foco y es perpendicular al eje mayor, se llama LADO RECTO (LR) de la elipse y las coordenadas de los puntos L y R los podemos calcular haciendo $x = c$ en la ecuación (2):

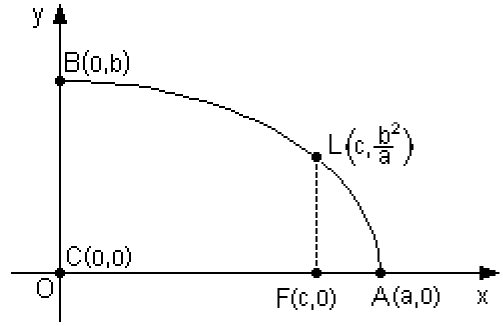
$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

despejando la "y" se tiene: $y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$; $y^2 = b^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)$; como $b^2 = a^2 - c^2$

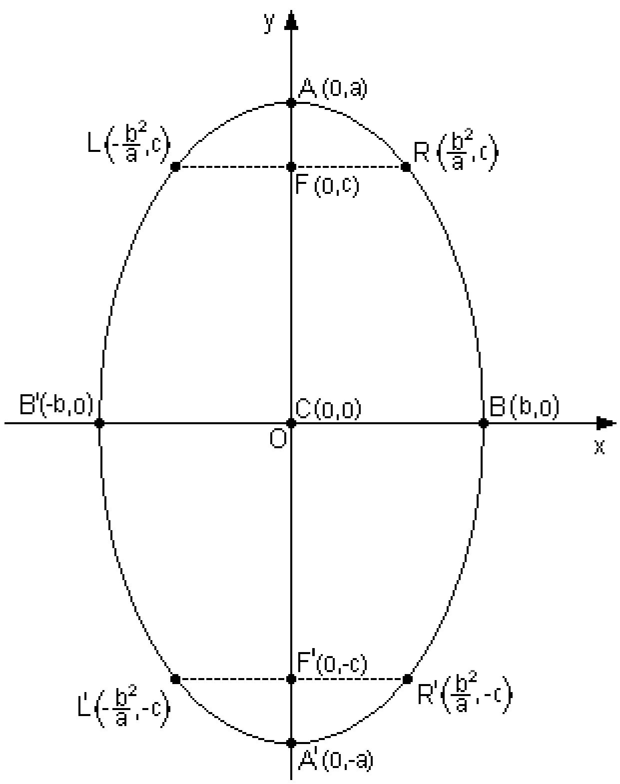
$$y^2 = \frac{b^4}{a^2} \text{ ; } y = \pm\sqrt{\frac{b^4}{a^2}} \text{ ; } y = \pm\frac{b^2}{a}$$

por lo tanto $L\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, $R\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$, $L'\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$, $R'\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$

Una observación importante es la siguiente, como la ecuación (2) contiene sólo potencias pares en las variables x y y, esto indica que la elipse es SIMÉTRICA con respecto a cada uno de los ejes coordenados y al origen también, por lo que cuando se dibuje su gráfica, es suficiente considerar solamente la parte que está situada en el primer cuadrante coordenado donde los valores de $x \geq 0$ y aprovechando la simetría de la elipse se puede completar su gráfica.



- Si el eje focal coincide con el eje "y", la ecuación de la elipse en forma ordinaria con centro en el origen se obtiene en forma similar a la anterior, siendo su ecuación y sus elementos:



$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1} \cdots (3)$$

Ecuación del eje focal: $x = 0$
Ecuación de eje menor: $y = 0$

$a = \sqrt{del\ mayor\ deno\min ador\ de}\ (3)$

$b = \sqrt{del\ menor\ deno\min ador\ de}\ (3)$

$a^2 = b^2 + c^2$; $LR = \dfrac{2b^2}{a}$

La EXCENTRICIDAD de una elipse determina la forma de esta curva, la razón constante $e = \dfrac{c}{a}$ indica que tan abierta o cerrada es la elipse. Si $e = 0$ y "a" permanece constante, entonces $c = 0$ y como $b^2 = a^2 - c^2$; $b^2 = a^2$; $b = a$, esto indica que los dos focos coinciden con el centro de la elipse y la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se convierte en la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio $r = a$ o sea $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$; $x^2 + y^2 = a^2$. Conforme el valor de "e" crece, los focos de la elipse se separan alejándose del centro y "b" decrece, esto es, que si $e = 1$ entonces $a = c$ y por lo tanto $b^2 = a^2 - c^2 = 0$ por lo que $b = 0$ y la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no se puede aplicar y la gráfica de la elipse degenera en el segmento de recta que conecta los focos. Por consiguiente, habrá elipse real si la excentricidad varía dentro del intervalo $0 < e < 1$.

EJEMPLOS

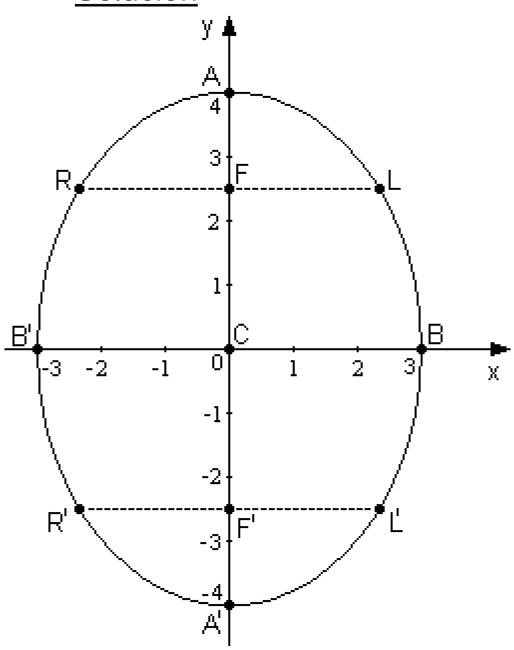
1) Obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son $F'(-5,0)$, $F(5,0)$ y la magnitud del eje mayor es 12.

Solución

De acuerdo con la información dada, las coordenadas del centro son $C(0,0)$ y la ecuación de la elipse es de la forma (2)... $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, la longitud del eje mayor es $2a=12$; $a=\frac{12}{2}$; $a=6$, la distancia focal $FF'=2c$, si $2c=10$; $c=\frac{10}{2}$; $c=5$, como $b^2=a^2-c^2$; $b^2=(6)^2-(5)^2$; $b^2=36-25$; $b^2=11$; $b=\sqrt{11}\approx 3.3$, sustituyendo los valores de a^2 y b^2 en la ecuación (2): $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$ que es la ecuación pedida.

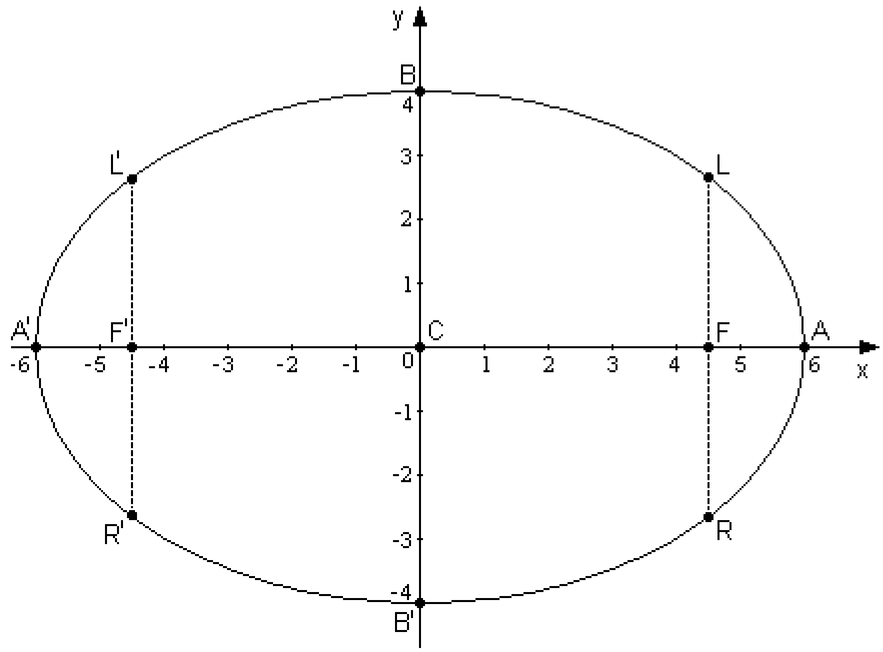
2) Bosquejar la gráfica de la elipse $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1$

Solución



Para bosquejar la gráfica de la ecuación de la elipse dada, es necesario obtener sus elementos, sabiendo que se trata de una elipse con centro en el origen $C(0,0)$ y eje mayor coincidiendo con el eje "y", $a^2=16$; $a=4$; $b^2=9$; $b=3$; $c^2=a^2-b^2$; $c^2=16-9=7$; $c=\sqrt{7}\approx 2.6$; $F(0,\sqrt{7})$, $F'(0,-\sqrt{7})$; $A(0,4)$, $A'(0,-4)$; $B(3,0)$, $B'(-3,0)$, ancho focal: $LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{9}{2}$; $L\left(\frac{9}{4},\sqrt{7}\right)$, $R\left(-\frac{9}{4},\sqrt{7}\right)$, $L'\left(\frac{9}{4},-\sqrt{7}\right)$, $R'\left(-\frac{9}{4},-\sqrt{7}\right)$, excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}\approx 0.66$

3) Bosquejar la gráfica de la elipse $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$



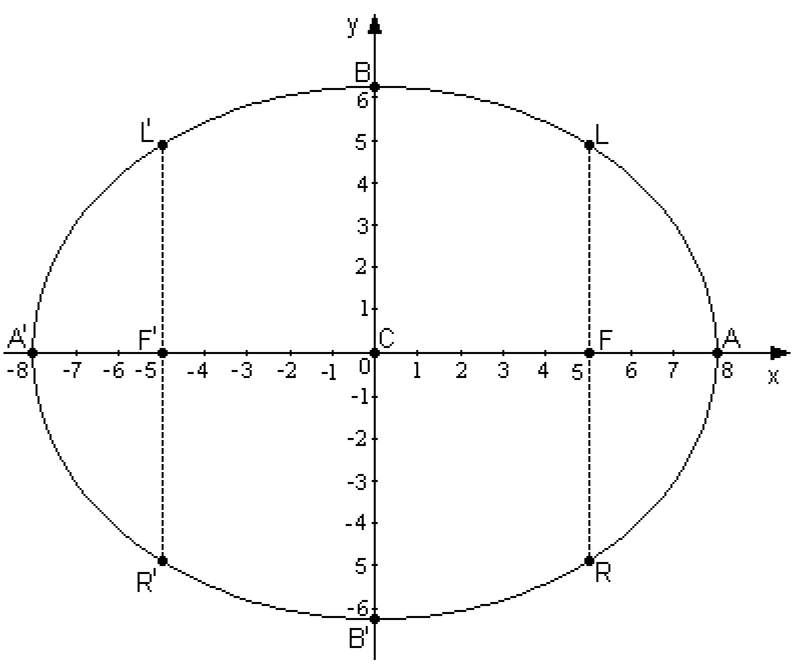
Solución

La elipse tiene centro en el origen de coordenadas $C(0,0)$, el eje mayor coincide con el eje "x", $a^2=36$; $a=6$; $b^2=16$; $b=4$; $c^2=a^2-b^2$; $c^2=36-16=20$; $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\approx 4.5$ $F(2\sqrt{5},0)$, $F'(-2\sqrt{5},0)$; $A(6,0)$, $A'(-6,0)$; $B(0,4)$, $B'(0,-4)$, ancho focal: $LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(16)}{6}=\frac{16}{3}\approx 5.3$

$L\left(2\sqrt{5},\frac{8}{3}\right)$; $R\left(2\sqrt{5},-\frac{8}{3}\right)$; $L'\left(-2\sqrt{5},\frac{8}{3}\right)$; $R'\left(-2\sqrt{5},-\frac{8}{3}\right)$, excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0.75$

4) La excentricidad de una elipse con centro en el origen es $e=\frac{5}{8}$ y su eje focal coincide con el eje "x", obtener su ecuación y bosquejar su gráfica.

Solución



Si $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{8}$; $c=5$; $a=8$

$b^2=a^2-c^2$; $b^2=64-25$; $b^2=39$

$b=\sqrt{39}\approx 6.2$; ancho focal: $LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(39)}{8}=\frac{39}{4}$; $A(8,0)$

$A'(-8,0)$; $B(0,\sqrt{39})$, $B'(0,-\sqrt{39})$

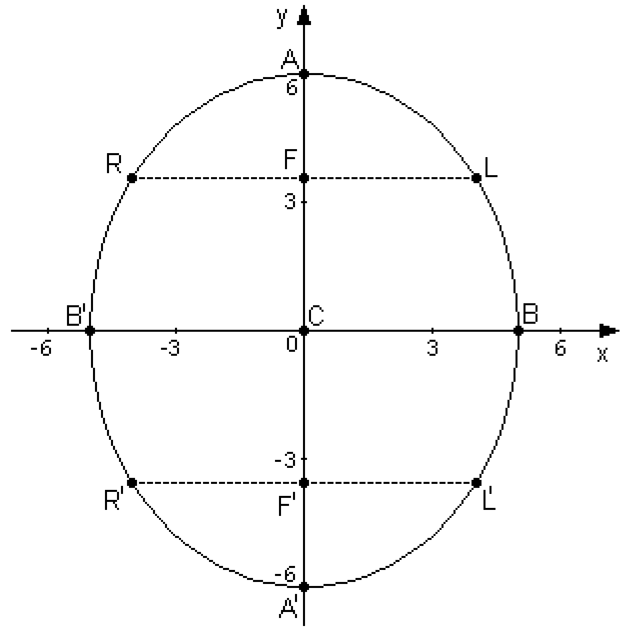
$F(5,0)$, $F'(-5,0)$; $L\left(5,\frac{39}{8}\right)$

$R\left(5,-\frac{39}{8}\right)$; $L'\left(-5,\frac{39}{8}\right)$

$R'\left(-5,-\frac{39}{8}\right)$; $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{8}\approx 0.63$;

$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$

5) Una elipse con centro en el origen tiene un vértice $A(0,6)$ y la longitud de su eje menor es 10, obtener su ecuación y bosquejar su gráfica.



Solución

De acuerdo con la información dada, la ecuación de la elipse es de la forma

(3)••• $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$

Si $A(0,6)$; $a=6$, la longitud del eje menor $2b=10$; $b=5$; $c^2=a^2-b^2$; $c^2=36-25$; $c^2=11$; $c=\sqrt{11}\approx 3.3$; $A(0,-6)$; $C(0,0)$; $B(5,0)$, $B'(-5,0)$; ancho focal: $LR=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(25)}{6}=\dfrac{25}{3}\approx 8.3$; $F(0,\sqrt{11})$, $F'(0,-\sqrt{11})$; $L\left(\dfrac{25}{6},\sqrt{11}\right)$, $R\left(-\dfrac{25}{6},\sqrt{11}\right)$, $L'\left(\dfrac{25}{6},-\sqrt{11}\right)$, $R'\left(-\dfrac{25}{6},-\sqrt{11}\right)$; $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}\approx 0.55$.

ecuación: $\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{x^2}{25}=1$

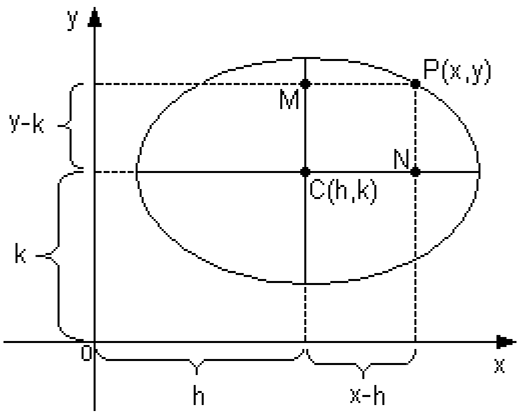
EJERCICIOS

1) Obtenga los elementos de la elipse $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{4}=1$ y bosqueje su gráfica.
2) Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F'(-6,0)$, $F(6,0)$ y tiene vértices $B(0,4)$, $B'(0,-4)$.
3) Obtenga la ecuación de una elipse con centro en el origen, ancho focal igual a $\dfrac{12}{5}$, su eje mayor coincide con el eje "y", y bosquejar su gráfica.
4) Una elipse horizontal, con centro en el origen tiene longitud de los semiejes mayor y menor 6 y 5 respectivamente, obtenga su ecuación y bosqueje su gráfica.
5) Una elipse con centro en el origen tiene longitud del eje mayor sobre el eje "x" igual a 8 unidades y longitud del eje menor 4 unidades, obtener su ecuación y bosquejar su gráfica.

10.3.2. ELIPSE CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN Y EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

Analizando la ecuación de la elipse en forma ordinaria con centro en el origen $C(0,0)$ y eje focal coincidiendo con el eje "x", $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se observa la siguiente propiedad esencial: "el cociente $\frac{x^2}{a^2}$ indica que: $\frac{(Distancia\ de\ un\ punto\ cualquiera\ de\ la\ elipse\ al\ semieje\ menor)^2}{(Magnitud\ del\ semieje\ mayor)^2}$ y el cociente $\frac{y^2}{b^2}$ indica que: $\frac{(Distancia\ de\ un\ punto\ cualquiera\ de\ la\ elipse\ al\ semieje\ mayor)^2}{(Magnitud\ del\ semieje\ menor)^2}$".

Aplicando esta propiedad esencial de la elipse, podemos obtener la ecuación en forma ordinaria de cualquier elipse en el plano coordenado, veamos los siguientes casos:

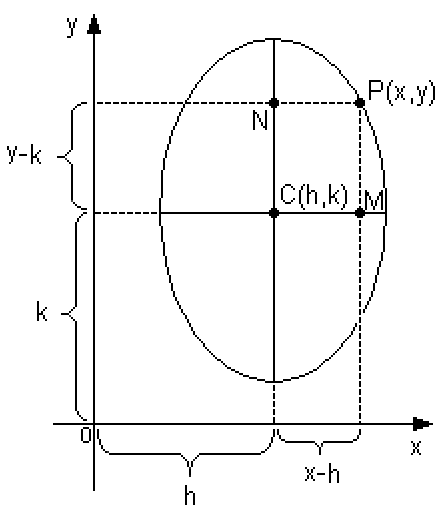


a) Coordenadas del centro de la elipse $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje "x".
Si $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la elipse, aplicando la propiedad esencial se tiene: $\frac{(PM)^2}{a^2}+\frac{(PN)^2}{b^2}=1$, como $PM=x-h$ y $PN=y-k$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1} \cdots (\mathrm{I})$$

(I) es la ecuación de la elipse en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje "x".

b) Coordenadas del centro de la elipse $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje "y".

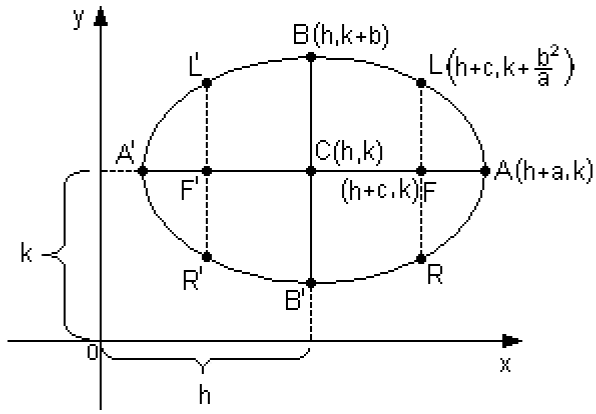


Siendo $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse, aplicando la propiedad esencial se tiene: $\frac{(PM)^2}{a^2}+\frac{(PN)^2}{b^2}=1$, como

$PM=y-k$ y $PN=x-h$; $\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1} \cdots (\mathrm{II})$

(II) es la ecuación de la elipse en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje "y".

En las ecuaciones (I) y (II), las cantidades a, b y c tienen el mismo significado que en las anteriores ecuaciones (2) y (3), por lo que para bosquejar la gráfica de cualquiera de las formas (I) o (II) no debe presentar mayor dificultad la obtención de sus elementos:

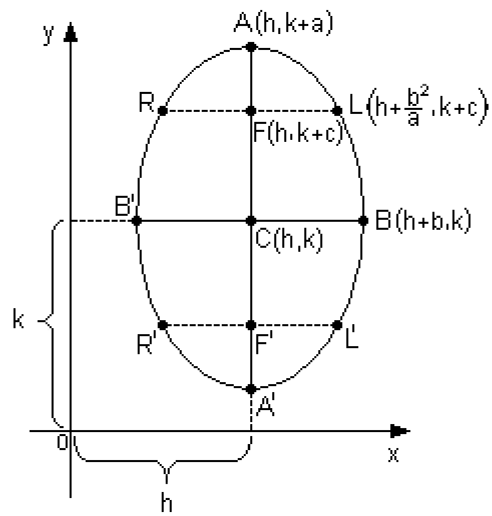


Las coordenadas A', B', L', R', F', R son fáciles de obtener aprovechando la simetría de la elipse.

$$(\mathrm{I})\ldots\quad \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Las coordenadas A', B', R, R', L', F', se pueden obtener con facilidad aprovechando la simetría de la elipse.

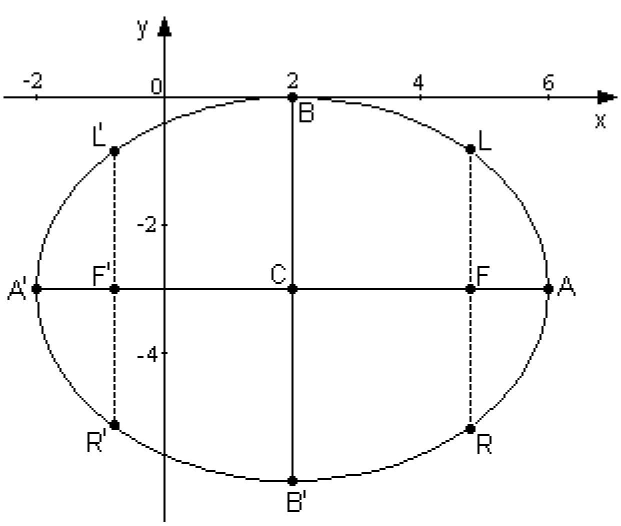
$$(\mathrm{II})\ldots\quad \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



EJEMPLOS

1) Bosquejar la gráfica de la elipse $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$

Solución



La ecuación dada es de la forma $(\mathrm{I})\ldots\quad \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (elipse horizontal). Donde a partir del conocimiento de las coordenadas del centro $C(h,k)=(2,-3)$ y de los valores de $a=\sqrt{16}=4$; $b=\sqrt{9}=3$; $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$ podemos obtener todos los elementos de la elipse. Nos concretamos a la obtención de los elementos del primer sector de la elipse y aprovechando su simetría, se obtendrán el resto de sus elementos:

$A(h+a,k)=(6,-3)$; $B(h,k+b)=(2,0)$; $F(h+c,k)=\left(2+\sqrt{7},-3\right)$; $L\left(h+c,k+\dfrac{b^2}{a}\right)=\left(2+\sqrt{7},-\dfrac{3}{4}\right)$.

Por simetría: $B'(2,-6)$; $A'(-2,-3)$; $F'\left(2-\sqrt{7},-3\right)$; $R\left(2+\sqrt{7},-\dfrac{21}{4}\right)$; $L'\left(2-\sqrt{7},-\dfrac{3}{4}\right)$; $R'\left(2-\sqrt{7},-\dfrac{21}{4}\right)$; $e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}\approx 0.66$; Ec. eje mayor: $y=-3$; Ec. eje menor: $x=2$

2) Obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(2,4)$, $F'(2,-4)$ y uno de sus vértices $A(2,6)$, bosquejar su gráfica.

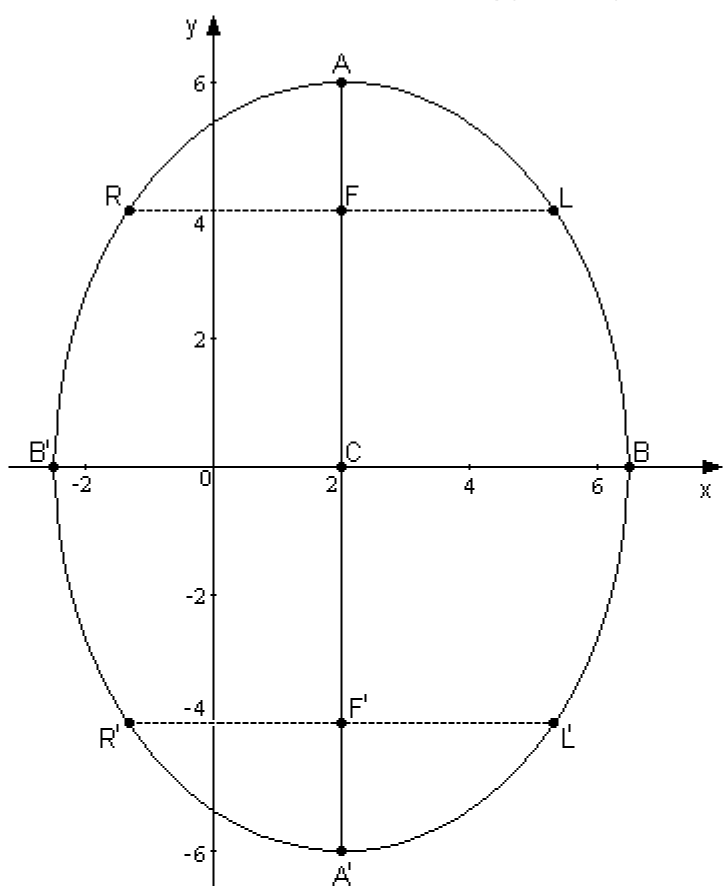
Solución

El centro de la elipse se localiza a la mitad del segmento $F'F$ o sea: $C\left(h=\dfrac{x_F+x_{F'}}{2},k=\dfrac{y_F+y_{F'}}{2}\right)=(2,0)$; $CF=c$; $c=4$; $CA=a$; $a=6$; $b=\sqrt{a^2-c^2}$; $b=2\sqrt{5}$

$A(h,k+a)=(2,6)$; $B(h+b,k)=\left(2+2\sqrt{5},0\right)$; $F(h,k+c)=(2,4)$; $L\left(h+\dfrac{b^2}{a},k+c\right)=\left(\dfrac{16}{3},4\right)$.

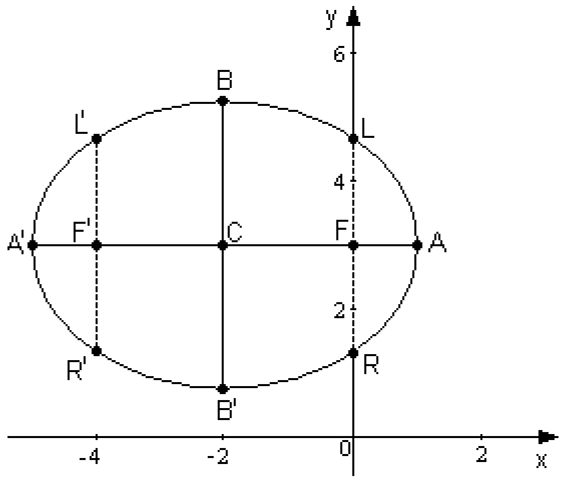
Por simetría: $B'\left(2-2\sqrt{5},0\right)$; $A'(2,-6)$; $F'(2,-4)$; $R\left(-\dfrac{4}{3},4\right)$; $L'\left(\dfrac{16}{3},-4\right)$; $R'\left(-\dfrac{4}{3},-4\right)$; $e=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$;

Ec. eje mayor: $x=2$; Ec. eje menor: $y=0$; Ec. elipse: $\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{(x-2)^2}{20}=1$



3) Obtener la ecuación de la elipse de vértices $A(1,3)$, $A'(-5,3)$ y excentricidad $e=\frac{2}{3}$, bosquejar su gráfica.

Solución



El centro de la elipse se localiza a la mitad del segmento AA' o sea:
$C\left(h=\frac{x_A+x_{A'}}{2},k=\frac{y_A+y_{A'}}{2}\right)=(-2,3)$; $CA=a$;

$a=3$; si $e=\frac{c}{a}$; $c=ae=3\left(\frac{2}{3}\right)=2$; $b=\sqrt{a^2-c^2}$;

$b=\sqrt{5}$; $A(h+a,k)=(1,3)$; $B(h,k+b)=\left(-2,3+\sqrt{5}\right)$;

$F(h+c,k)=(0,3)$; $L\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right)=\left(0,\frac{14}{3}\right)$

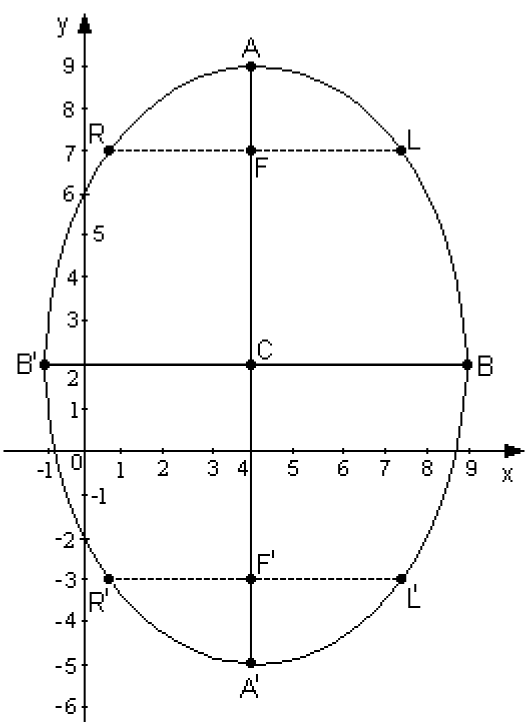
Por simetría: $B'\left(-2,3-\sqrt{5}\right)$; $A'(-5,3)$; $F'(-4,3)$;

$R\left(0,\frac{4}{3}\right)$; $L'\left(-4,\frac{14}{3}\right)$; $R'\left(-4,\frac{4}{3}\right)$; $e=\frac{2}{3}$;

Ec. eje mayor: $y=3$; Ec. eje menor: $x=-2$; Ec. elipse: $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{5}=1$

4) Obtener la ecuación de la elipse con centro $C(4,2)$, foco $F(4,7)$, vértice $A'(4,-5)$ y bosquejar su gráfica.

Solución



$CF=c$; $c=5$; $CA=a$; $a=7$; $b^2=a^2-c^2$
$b=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$; $A(h,k+a)=(4,9)$
$B(h+b,k)=\left(4+2\sqrt{6},2\right)$; $F(h,k+c)=(4,7)$
$L\left(h+\frac{b^2}{a},k+c\right)=\left(\frac{52}{7},7\right)$. Por simetría: $B'\left(4-2\sqrt{6},2\right)$

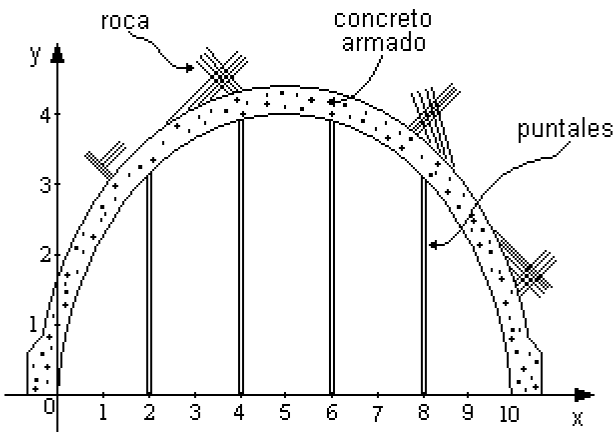
$A'(4,-5)$; $F'(4,-3)$; $R\left(\frac{4}{7},7\right)$; $L'\left(\frac{52}{7},-3\right)$; $R'\left(\frac{4}{7},-3\right)$

$e=\frac{5}{7}\approx 0.71$; Ec. eje mayor: $x=4$

Ec. eje menor: $y=2$; Ec. elipse: $\frac{(y-2)^2}{49}+\frac{(x-4)^2}{24}=1$

5) Problema: Un arco semielíptico de concreto armado, tiene un claro (distancia entre los apoyos) de 10 metros y una altura máxima de 4 metros (ver figura). Para construir dicho arco, es necesario apuntalarlo a distancias cada 2 metros, se pide obtener la altura de cada puntal.

Solución



Para obtener magnitudes de la elipse y poder obtener su ecuación, ubicamos el arco semielíptico en un sistema de ejes coordenados como se muestra en la figura: su ecuación es de la forma (I)••• $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. Longitud del eje mayor $2a=10$; $a=5$; longitud del semieje menor $b=4$; coordenadas del centro $C(5,0)$, ecuación de la elipse $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. La altura de los puntales se obtienen despejando la variable "y" de la ecuación de la elipse y considerando solo la parte positiva: $y=\frac{4}{5}\sqrt{10x-x^2}$. Por simetría de la elipse, los puntales en 2 y 8 metros son de igual longitud, lo mismo en 4 y 6 metros:

si $x=2$; $y=\frac{4}{5}\sqrt{10(2)-(2)^2}\doteq 3.20$ metros

si $x=4$; $y=\frac{4}{5}\sqrt{10(4)-(4)^2}\doteq 3.92$ metros

EJERCICIOS

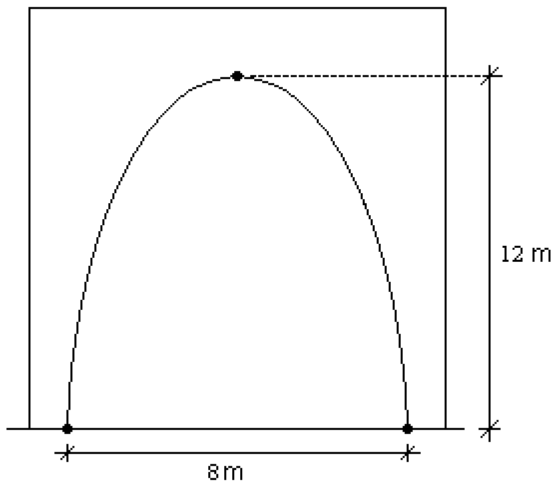
1) Bosquejar la gráfica de la elipse $\frac{(y-6)^2}{36}+\frac{(x+3)^2}{16}=1$

2) Los focos de una elipse son $F'(2,4)$, $F(2,10)$ y uno de sus vértices $A(2,12)$, obtener su ecuación y bosquejar su gráfica.

3) Los vértices de una elipse son $A'(-2,-3)$, $A(8,-3)$ y la magnitud de su lado recto $LR=\frac{32}{5}$, obtenga su ecuación y bosquejar su gráfica.

4) Una elipse tiene centro $C(1,-4)$, foco $F(1,6)$ y vértice $B'(-2,-4)$, obtenga su ecuación y bosqueje su gráfica.

5) Un arco de entrada a un teatro es una semielipse como se muestra en la figura, obtenga su ecuación.



10.4. FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

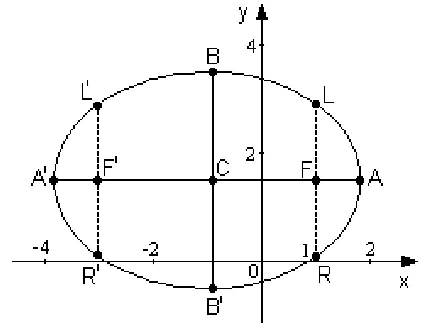
Si en las ecuaciones (I)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y (II)... $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ multiplicamos por a^2b^2, desarrollamos los cuadrados, trasponemos y ordenamos términos, se obtiene la ecuación de la elipse en FORMA GENERAL $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ cuyos ejes son paralelos a los coordenados, los coeficientes A y C son distintos de cero, diferentes numéricamente y del mismo signo, los coeficientes de primer grado D y E indican que el centro de la elipse está fuera del origen, si $D=0$ el centro se localiza sobre el eje "y", si $E=0$ estará sobre el eje "x", el término independiente F indica que la elipse no pasa por el origen y si $F=0$ la elipse si pasa por el origen.

Recíprocamente, cuando una elipse es dada en su forma general, puede obtenerse su forma ordinaria aplicando el método de completar cuadrados y con esto bosquejar su gráfica.

EJEMPLOS

En cada inciso se da la ecuación de una elipse en forma general, se pide obtener su forma ordinaria, sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $x^2+4y^2+2x-12y+2=0$



Solución

Para aplicar el método de completar cuadrados es necesario ordenar la ecuación:

$x^2+2x+4(y^2-3y)=-2$

se completa el trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2+2x+(1)^2+4\left[y^2-3y+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]=-2+(1)^2+4\left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad (x+1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=8$$

dividiendo todo entre 8: $\dfrac{(x+1)^2}{8}+\dfrac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{4}=1$ FORMA ORDINARIA

Elementos: $a^2=8$; $a=2\sqrt{2}$; $b^2=4$; $b=2$; $c^2=a^2-b^2=8-4=4$; $c=2$; $C\left(-1,\frac{3}{2}\right)$; $A\left(-1+2\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$; $A'\left(-1-2\sqrt{2},\frac{3}{2}\right)$; $B\left(-1,\frac{7}{2}\right)$; $B'\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$; $F\left(1,\frac{3}{2}\right)$; $F'\left(-3,\frac{3}{2}\right)$; $L\left(1,\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$; $L'\left(-3,\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$; $R\left(1,\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$; $R'\left(-3,\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$; $LR=2\sqrt{2}$; $e=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.7$

2) $9x^2+4y^2-18x-27=0$

<u>Solución</u>

Agrupando términos: $9x^2-18x+4y^2=27$

factorizando y completando cuadrados:

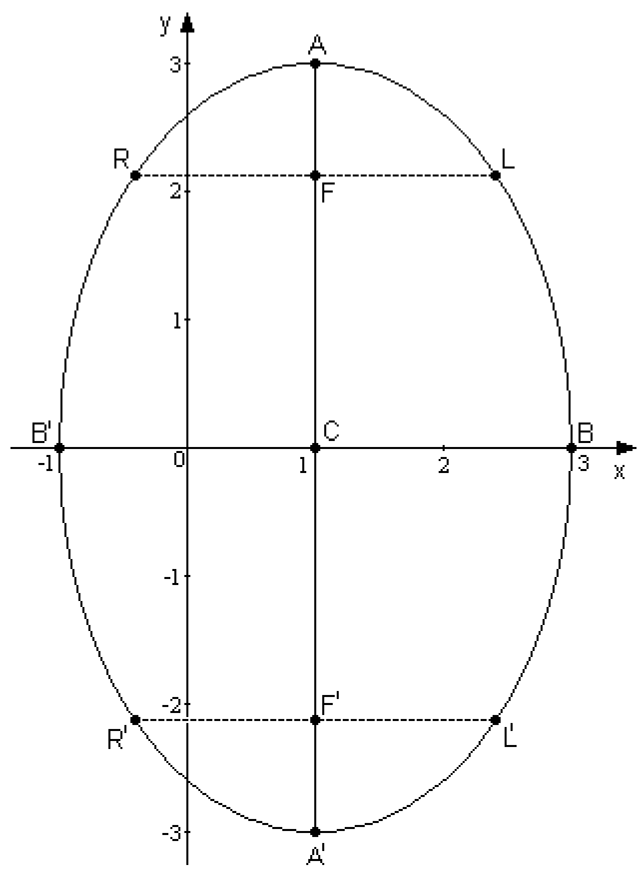
$9\left[x^2-2x+(1)^2\right]+4y^2=27+9$

$9(x-1)^2+4y^2=36$

dividiendo entre 36: $\dfrac{9(x-1)^2}{36}+\dfrac{4y^2}{36}=\dfrac{36}{36}$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{36}{9}}+\frac{y^2}{\frac{36}{4}}=1$$

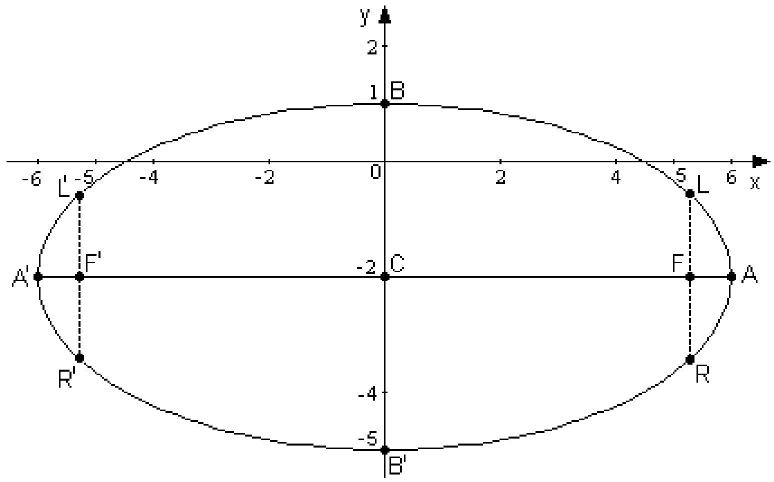
$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ FORMA ORDINARIA



Elementos: $C(1,0)$; $a^2=9$; $a=3$; $b^2=4$ $b=2$; $c^2=a^2-b^2=9-4=5$; $c=\sqrt{5}$ $A(1,3)$ $A'(1,-3)$; $B(3,0)$; $B'(-1,0)$; $F\left(1,\sqrt{5}\right)$ $F'\left(1,-\sqrt{5}\right)$; $\frac{b^2}{a}=\frac{4}{3}$; $L\left(\frac{7}{3},\sqrt{5}\right)$; $L'\left(\frac{7}{3},-\sqrt{5}\right)$ $R\left(-\frac{1}{3},\sqrt{5}\right)$; $R'\left(-\frac{1}{3},-\sqrt{5}\right)$; $LR=\frac{8}{3}$ $e=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0.75$

3) $x^2+4y^2+16y-20=0$

Solución



Agrupando términos y factorizando: $x^2+4(y^2+4y)=20$
completando cuadrados:

$$x^2+4\left[y^2+4y+(2)^2\right]=20+16$$
$$x^2+4(y+2)^2=36$$

dividiendo entre 36:

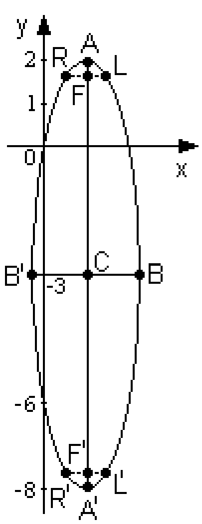
$$\frac{x^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{\frac{36}{4}}=1$$

$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$ FORMA ORDINARIA

Elementos: $C(0,-2)$; $a^2=36$; $a=6$; $b^2=9$; $b=3$; $c^2=a^2-b^2=36-9=27$; $c=3\sqrt{3}$; $A(6,-2)$
$A'(-6,-2)$; $B(0,1)$; $B'(0,-5)$; $F\left(3\sqrt{3},-2\right)$; $F'\left(-3\sqrt{3},-2\right)$; $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$; $L\left(3\sqrt{3},-\dfrac{1}{2}\right)$; $L'\left(-3\sqrt{3},-\dfrac{1}{2}\right)$
$R\left(3\sqrt{3},-\dfrac{7}{2}\right)$; $R'\left(-3\sqrt{3},-\dfrac{7}{2}\right)$; $LR=3$; $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.87$

4) $16x^2+y^2-32x+6y=0$

Solución



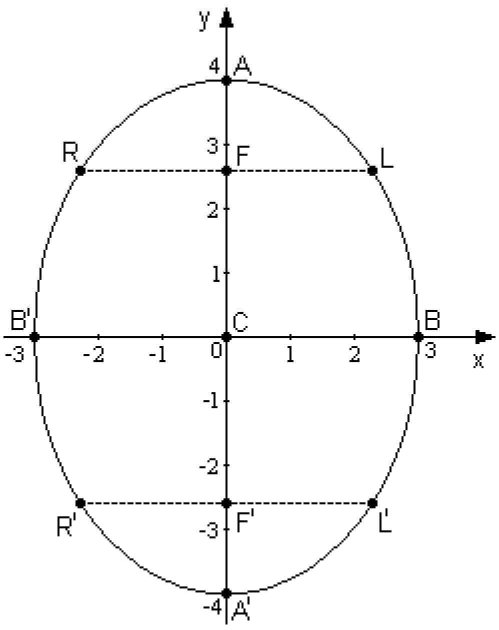
Agrupando términos y factorizando: $16(x^2-2x)+y^2+6y=0$
completando cuadrados: $16(x^2-2x+1)+y^2+6y+(3)^2=16+9$
$16(x-1)^2+(y+3)^2=25$
dividiendo entre 25: $\dfrac{(x-1)^2}{\frac{25}{16}}+\dfrac{(y+3)^2}{25}=1$ FORMA ORDINARIA

Elementos: $C(1,-3)$; $a^2=25$; $a=5$; $b^2=\dfrac{25}{16}$; $b=\dfrac{5}{4}$
$c^2=a^2-b^2=25-\dfrac{25}{16}=\dfrac{375}{16}$; $c=\dfrac{\sqrt{375}}{4}$; $A(1,2)$; $A'(1,-8)$; $B\left(\dfrac{9}{4},-3\right)$
$B'\left(-\dfrac{1}{4},-3\right)$; $F\left(1,-3+\dfrac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $F'\left(1,-3-\dfrac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{5}{16}$; $L\left(\dfrac{21}{16},-3+\dfrac{\sqrt{375}}{4}\right)$

$L'\left(\frac{21}{16},-3-\frac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $R\left(\frac{11}{16},-3+\frac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $R'\left(\frac{11}{16},-3-\frac{\sqrt{375}}{4}\right)$; $LR=\frac{5}{8}$; $e=\frac{\sqrt{375}}{20}\approx 0.97$

5) $16x^2+9y^2-144=0$

<u>Solución</u>



Ordenando términos: $16x^2+9y^2=144$

dividiendo entre 144: $\frac{x^2}{\frac{144}{16}}+\frac{y^2}{\frac{144}{9}}=1$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ FORMA ORDINARIA

Elementos: $C(0,0)$; $a^2=16$; $a=4$; $b^2=9$; $b=3$

$c^2=a^2-b^2=16-9=7$; $c=\sqrt{7}$; $A(0,4)$; $A'(0,-4)$; $B(3,0)$

$B'(-3,0)$; $F(0,\sqrt{7})$; $F'(0,-\sqrt{7})$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$; $L\left(\frac{9}{4},\sqrt{7}\right)$

$L'\left(\frac{9}{4},-\sqrt{7}\right)$; $R\left(-\frac{9}{4},\sqrt{7}\right)$; $R'\left(-\frac{9}{4},-\sqrt{7}\right)$; $LR=\frac{9}{2}$

$e=\frac{\sqrt{7}}{4}\approx 0.66$

EJERCICIOS

En cada inciso se da la ecuación de una elipse en forma general, obtenga su ecuación en forma ordinaria, sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $8x^2+4y^2+16x-12y-15=0$
2) $4x^2+9y^2-8x-32=0$
3) $36x^2+9y^2+36y-288=0$
4) $16x^2+25y^2-48x+100y-264=0$
5) $4x^2+16y^2-64=0$

XI. LA HIPÉRBOLA

Objetivos: Que el alumno:

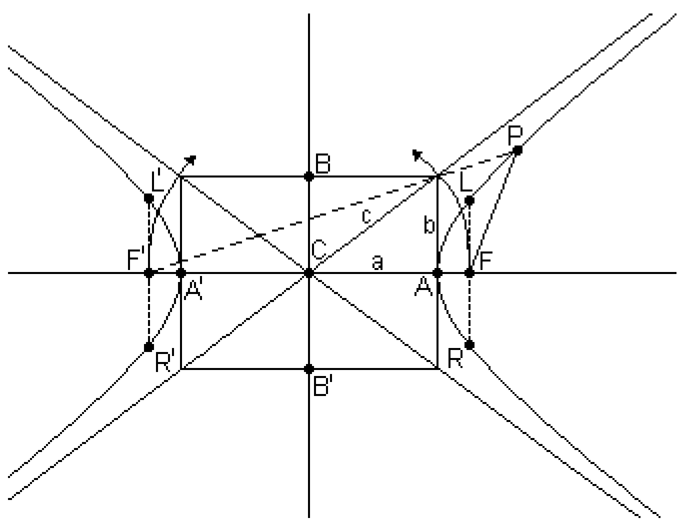
1. Explique la hipérbola como lugar geométrico.
2. Dada la ecuación de una hipérbola, sea capaz de identificar si está representada en forma ordinaria o en forma general.
3. Dados algunos elementos de una hipérbola, sea capaz de determinar su ecuación en sus dos formas y su gráfica también.
4. Dada la ecuación de una hipérbola en cualquiera de sus formas, sea capaz de determinar su gráfica.

11.1. LA HIPÉRBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Definición

La hipérbola es el lugar geométrico descrito por un punto "P" que se mueve en el plano de tal modo que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano F' y F (llamados focos), es siempre una cantidad constante $2a$.

Esto es $\left| PF' - PF \right| = 2a$



NOTACIONES

La hipérbola consta de dos ramas diferentes y de longitud infinita, en donde:

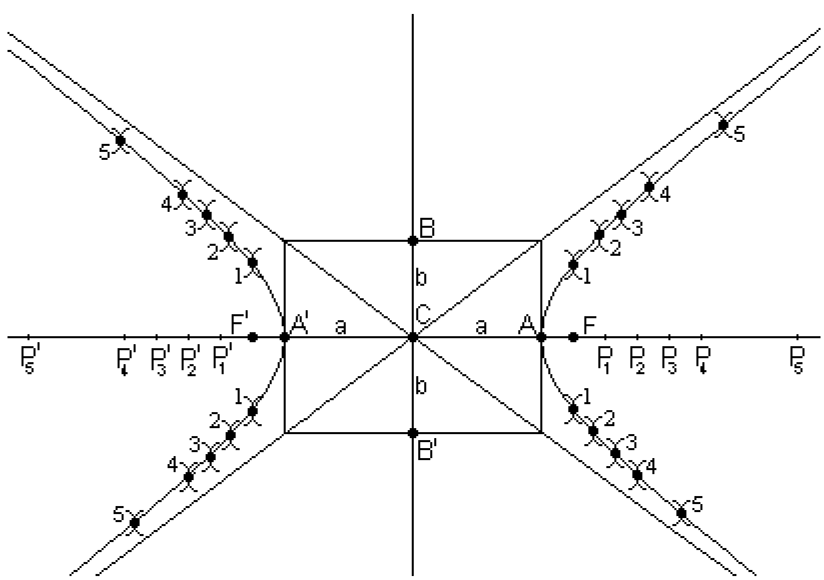
- $AA' = 2a$, eje focal o eje transverso (o eje real).
- $FF' = 2c$, distancia focal.
- $BB' = 2b$, eje conjugado (o eje imaginario).
- El punto medio de FF' es el centro C de la hipérbola.
- $CA' = CA = a$; $CB' = CB = b$; $CF' = CF = c$.
- Para que haya hipérbola es necesario que $c > a$.

- La cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje focal se llama lado recto (LR) o ancho focal.
- Las diagonales del rectángulo prolongadas se llaman asíntotas de la hipérbola.
- La relación entre a, b y c, por el teorema de Pitágoras es $c^2 = a^2 + b^2$.
- Si $a = b$, la hipérbola se llama EQUILÁTERA.
- La relación $e = \frac{c}{a}$ es la excentricidad de la hipérbola.

11.2. CONSTRUCCIÓN DE UNA HIPÉRBOLA CON REGLA Y COMPÁS

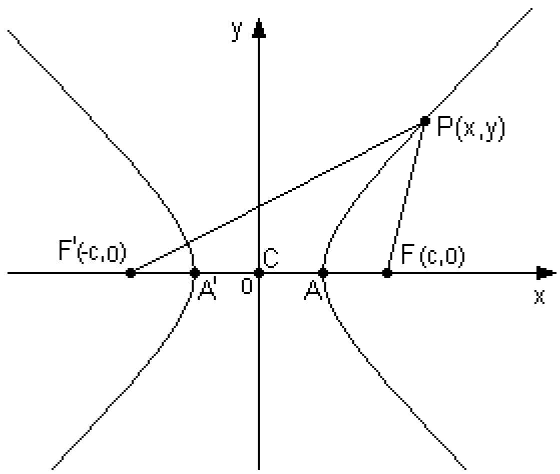
Para construir una hipérbola con regla y compás, suponemos conocidos los focos F, F', la cantidad constante $2a$ y el procedimiento es como sigue:

a) Se obtiene el punto medio de F, F' que es el centro "C" de la hipérbola.
b) Por el centro C se traza la perpendicular a F, F' (que es el eje conjugado).
c) A partir del centro C, se señalan los vértices A, A' que están a la distancia "a" de C o sea que $CA' = CA = a$.
d) Se construye el rectángulo de los ejes transverso y conjugado y se trazan las diagonales que son las asíntotas de la hipérbola.
e) Se marcan puntos cualesquiera a la derecha de F y a la izquierda de F', por ejemplo los simétricos $P_1, P_1', P_2, P_2', P_3, P_3', P_4, P_4', P_5, P_5', \ldots$
f) Con centro en los focos y radios $A'P_1, AP_1$, se obtienen las intersecciones 1 que son puntos de la hipérbola ya que $1F' - 1F = AA' = 2a$, repitiendo esto con los radios $A'P_2, AP_2, A'P_3, AP_3, A'P_4, AP_4, A'P_5, AP_5$, se obtienen las intersecciones $2,3,4,5$, que uniéndolos con trazo continuo, se obtiene la curva.



11.3. FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

Consideremos una hipérbola con "a" y "c" conocidos, ubicada en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, cuyo centro coincide con el origen de coordenadas $C(0,0)$, sus focos están sobre el eje "x" cuyas coordenadas son $F'(-c,0)$ y $F(c,0)$ y sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la hipérbola (que puede estar sobre la rama izquierda o sobre la derecha sin que esto altere la definición de hipérbola) ubicado sobre la rama derecha como se muestra en la figura y que de acuerdo con la definición este punto P estará situado en la hipérbola dada si y solo si $PF'-PF=2a$, expresándola analíticamente:



si $PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$; $PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Aislando el primer radical en el primer miembro, elevando al cuadrado, haciendo operaciones y reduciendo términos semejantes se tiene:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevando al cuadrado y reduciendo términos semejantes:

$$\left(cx-a^2\right)^2=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

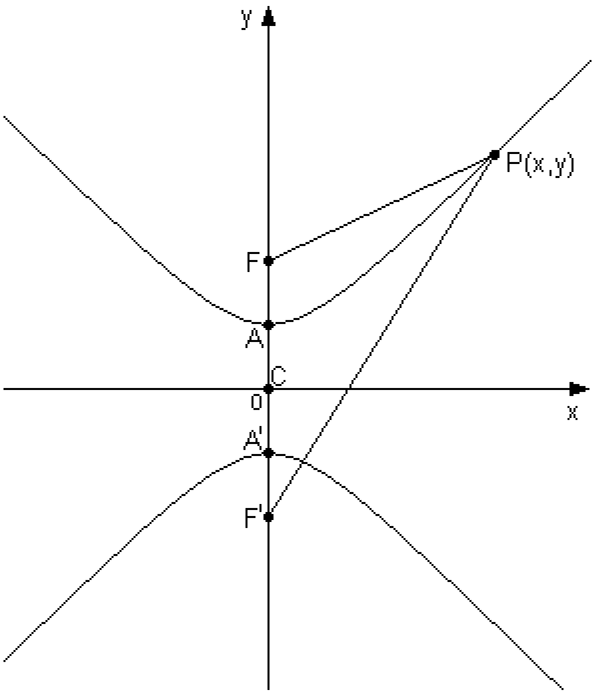
factorizando: $\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$

De la sección 11.1, la relación entre a,b y c por el teorema de Pitágoras es $c^2=a^2+b^2$, despejando $b^2=c^2-a^2$ y sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

dividiendo entre a^2b^2: $\frac{b^2x^2}{a^2b^2}-\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$; $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ ... (I)

La expresión (I) es la FORMA ORDINARIA de la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje x.

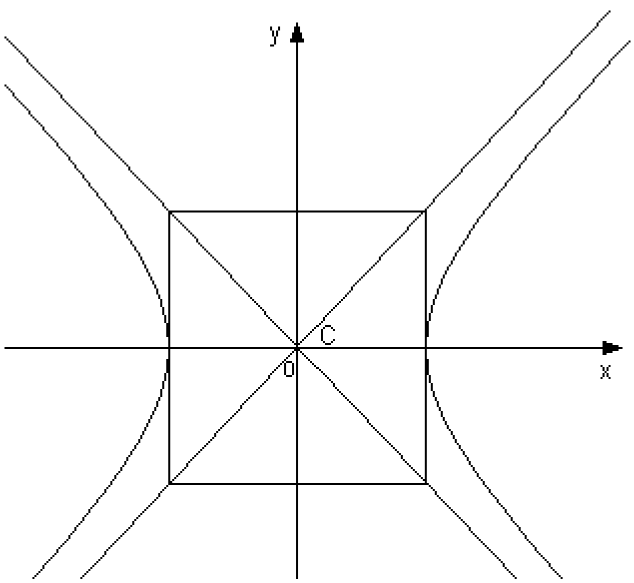


Con las mismas condiciones anteriores, pero con el eje focal coincidiendo con el eje "y", procediendo analíticamente en la misma forma se obtiene la ecuación $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1}$ ...(II) que es la <u>FORMA ORDINARIA</u> de la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje y.

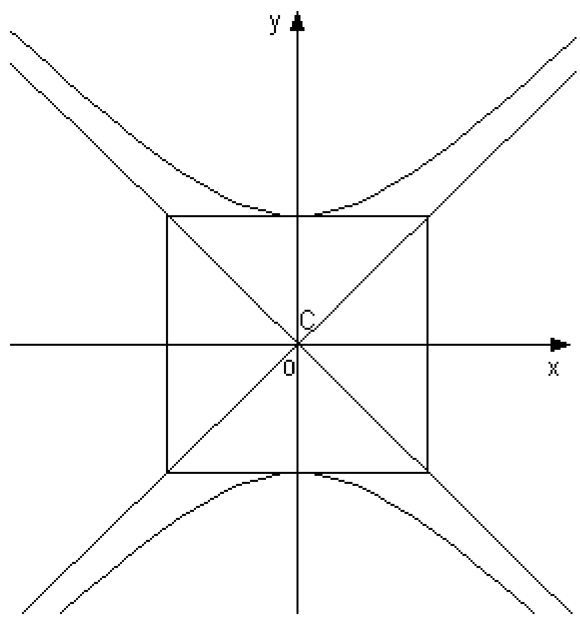
La ecuaciones (I) y (II) contienen sólo potencias pares en las variables x y y, la hipérbola que determinan cada una de ellas es <u>SIMÉTRICA</u> respecto a cada uno de los ejes coordenados y al origen, por lo que al bosquejar su gráfica es suficiente considerar solamente la parte que está situada en el primer cuadrante y aprovechando su simetría se puede completar el bosquejo de su gráfica.

<u>Nota:</u>

- Si en las ecuaciones (I) y (II), los semiejes a y b son iguales ($a=b$), las hipérbolas resultantes se llaman <u>EQUILATERAS</u>, ya que el rectángulo principal de la hipérbola equilátera es un cuadrado y por lo tanto sus asíntotas son perpendiculares entre sí.

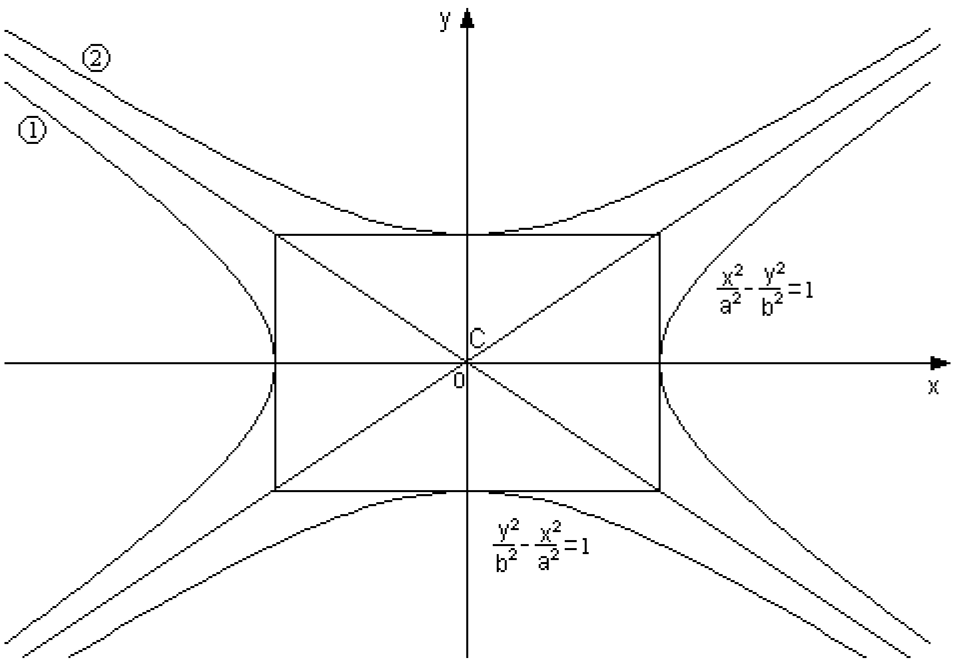


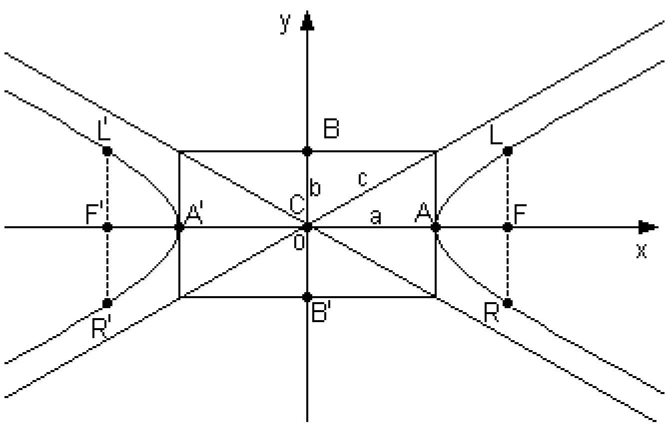
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$
o bien $x^2-y^2=a^2$



$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$
o bien $y^2-x^2=a^2$

- Dos hipérbolas en un mismo sistema de coordenadas con ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ se llaman hipérbolas <u>CONJUGADAS</u> entre si.



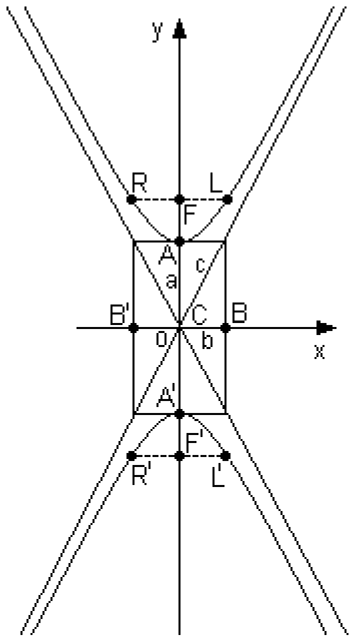


Los <u>ELEMENTOS</u> de la hipérbola referidos al sistema de coordenadas x, y son:

- Si la hipérbola es horizontal: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $C(0,0)$; $A(a,0)$; $B(0,b)$; $F(c,0)$, para determinar las coordenadas de L, despejamos "y" de la ecuación (I): $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, haciendo $x=c$ se tiene $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2}=\pm\frac{b^2}{a}$; $y=\frac{b^2}{a}$ es para $L\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$; $y=-\frac{b^2}{a}$ es para $R\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$. Por simetría de la hipérbola se tiene: $A'(-a,0)$; $B'(0,-b)$; $F'(-c,0)$ $L'\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$; $R\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$; Ecuación de las asíntotas: $y=\frac{b}{a}x$; $y=-\frac{b}{a}x$.

Ecuación del eje focal (transverso): $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$



- Si la hipérbola es vertical: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$; $C(0,0)$; $A(0,a)$ $B(b,0)$; $F(0,c)$; $L\left(\frac{b^2}{a},c\right)$

  Por simetría: $A'(0,-a)$; $B'(-b,0)$; $F'(0,-c)$; $L'\left(\frac{b^2}{a},-c\right)$ $R\left(-\frac{b^2}{a},c\right)$; $R'\left(-\frac{b^2}{a},-c\right)$

  Ecuación asíntotas: $y=\frac{a}{b}x$; $y=-\frac{a}{b}x$.

  Ecuación del eje focal: $x=0$ (eje y).

  Ecuación del eje conjugado: $y=0$ (eje x).

  Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$

La EXCENTRICIDAD de la hipérbola es una característica de la forma de su rectángulo principal y por consiguiente de la forma de la misma hipérbola, quedando determinada por la relación de la distancia entre los focos de la hipérbola FF' a la distancia entre sus vértices $A'A$, quedando indicada por $e=\frac{c}{a}$, como en la hipérbola $c>a$, se tiene que esta relación siempre es mayor que uno o sea que $e>1$, cuanto más cercano es a uno esta valor, será más alargado su rectángulo principal en dirección de su eje focal, en el caso de la hipérbola equilátera, esta relación es $e=\sqrt{2}$.

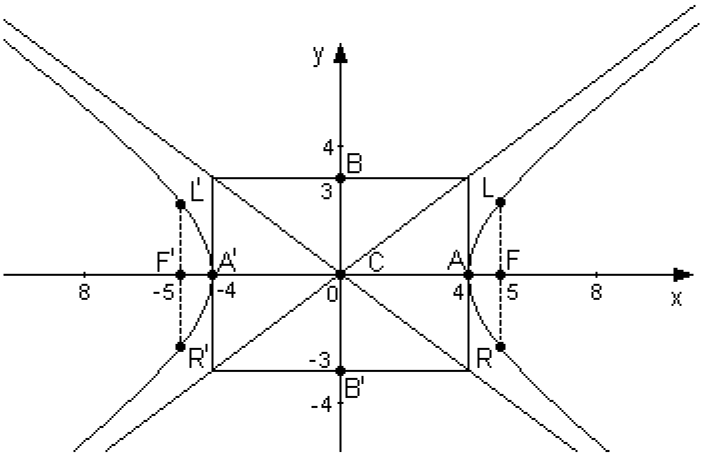
EJEMPLOS

En cada inciso del 1 al 3 se da la ecuación de una hipérbola, se pide obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Solución

La ecuación dada es de la forma (I)••• $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal). Para que el bosquejo de la hipérbola se haga rápidamente, se recomienda construir primero el rectángulo principal, en seguida, trazar las asíntotas (las diagonales), luego los elementos del primer cuadrante, para después, aprovechando la simetría de la hipérbola completar su bosquejo.
De la ecuación dada: $a^2=16$; $a=4$; $b^2=9$; $b=3$, como $c^2=a^2+b^2$; $c^2=16+9=25$; $c=5$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$, por lo tanto, sus elementos son: $C(0,0)$; $A(4,0)$; $B(0,3)$; $F(5,0)$; $L\left(5,\frac{9}{4}\right)$



Por simetría: $A'(-4,0)$; $B'(0,-3)$; $F'(-5,0)$; $L'\left(-5,\frac{9}{4}\right)$; $R\left(5,-\frac{9}{4}\right)$; $R'\left(-5,-\frac{9}{4}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\frac{3}{4}x$; $y=-\frac{3}{4}x$.

Ecuación del eje focal (transverso): $y=0$ (eje x).

Ecuación del eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$

2) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

<u>Solución</u>

La ecuación dada es de la forma (II)••• $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ (hipérbola vertical), $a^2=16$; $a=4$; $b^2=9$; $b=3$, como $c^2=a^2+b^2$; $c^2=16+9=25$; $c=5$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$, por lo tanto, sus elementos son: $C(0,0)$; $A(0,4)$; $B(3,0)$; $F(0,5)$; $L\left(\frac{9}{4},5\right)$

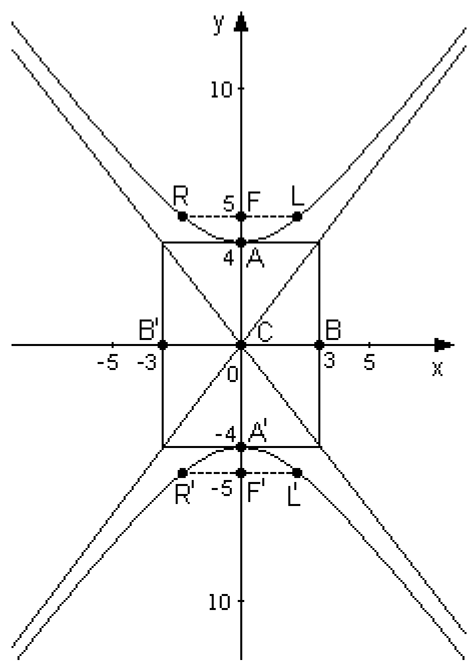
Por simetría: $A'(0,-4)$; $B'(-3,0)$; $F'(0,-5)$; $L'\left(\frac{9}{4},-5\right)$; $R\left(-\frac{9}{4},5\right)$; $R'\left(-\frac{9}{4},-5\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\frac{4}{3}x$; $y=-\frac{4}{3}x$.

Ecuación del eje focal : $x=0$ (eje y).

Ecuación del eje conjugado: $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$



3) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$

Solución

La ecuación dada es de la forma:

(I)... $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (horizontal) como $a^2 = b^2$ $a = b$ o sea $a = b = 5$ se trata de una hipérbola equilátera

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 25 = 50$; $c = 5\sqrt{2}$

$\frac{b^2}{a} = \frac{25}{5} = 5$ y los elementos son: $C(0,0)$ $A(5,0)$; $B(0,5)$; $F(5\sqrt{2},0)$; $L(5\sqrt{2},5)$

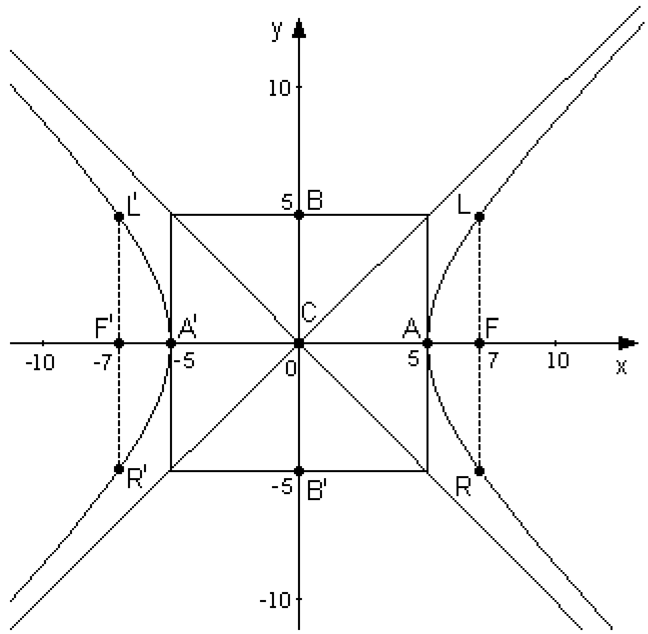
Por simetría: $A'(-5,0)$; $B'(0,-5)$; $F'(-5\sqrt{2},0)$; $L'(-5\sqrt{2},5)$; $R(5\sqrt{2},-5)$; $R'(-5\sqrt{2},-5)$

Ecuación asíntotas: $y = x$; $y = -x$.

Ecuación del eje focal (transverso): $y = 0$ (eje x).

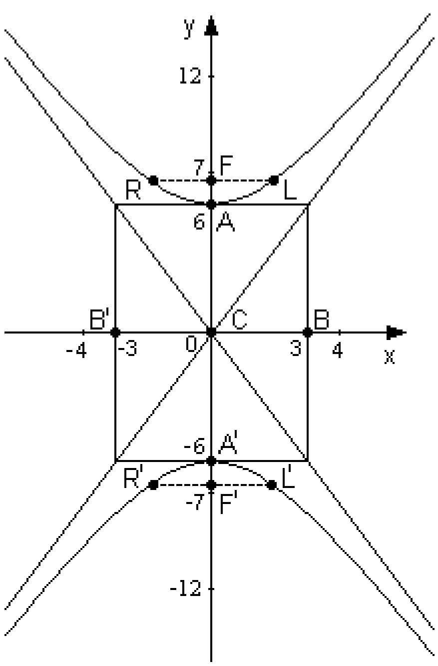
Ecuación del eje conjugado: $x = 0$ (eje y).

Excentricidad: $e = \sqrt{2}$



4) Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, $LR = 3$, semieje transverso $a = 6$ y eje focal sobre el eje y.

Solución



De acuerdo con la información dada, la ecuación de la hipérbola es de la forma:

(II)... $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (vertical), si $a = 6$ y $LR = \frac{2b^2}{a} = 3$; $\frac{2b^2}{6} = 3$ $b^2 = 9$; $b = 3$; $c^2 = a^2 + b^2$; $c^2 = 36 + 9 = 45$; $c = 3\sqrt{5}$ ecuación $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1$, los elementos son: $C(0,0)$; $A(0,6)$; $B(3,0)$ $F(0,3\sqrt{5})$; $L\left(\frac{3}{2},3\sqrt{5}\right)$. Por simetría: $A'(0,-6)$; $B'(-3,0)$ $F'(0,-3\sqrt{5})$; $L'\left(\frac{3}{2},-3\sqrt{5}\right)$; $R\left(-\frac{3}{2},3\sqrt{5}\right)$; $R'\left(-\frac{3}{2},-3\sqrt{5}\right)$

Ecuación asíntotas: $y = 2x$; $y = -2x$.

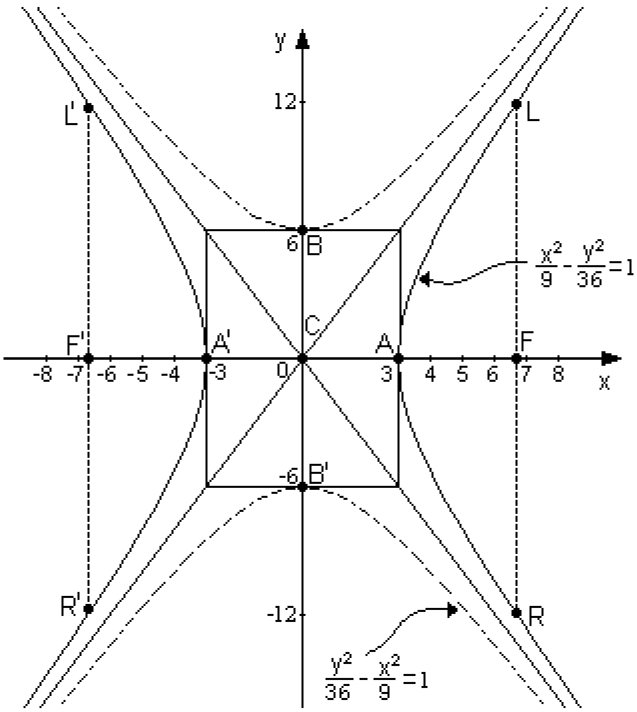
Ecuación del eje focal : $x = 0$ (eje y).

Ecuación del eje conjugado: $y = 0$ (eje x).

Excentricidad: $e = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

5) Obtener la hipérbola conjugada de $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{9}=1$

<u>Solución</u>



Las hipérbolas conjugadas comparten los mismos ejes, de tal modo que el eje focal de una es el conjugado de la otra y el conjugado de la primera es el focal de la otra. La ecuación de la hipérbola conjugada es: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (horizontal), donde $a^2=9$; $a=3$; $b^2=36$; $b=6$; $c^2=a^2+b^2$; $c^2=9+36=45$; $c=3\sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a}=\frac{36}{3}=12$. Elementos: $C(0,0)$; $A(3,0)$; $B(0,6)$; $F(3\sqrt{5},0)$; $L(3\sqrt{5},12)$

Por simetría: $A'(-3,0)$; $B'(0,-6)$; $F'(-3\sqrt{5},0)$; $L'(-3\sqrt{5},12)$; $R(3\sqrt{5},-12)$; $R'(-3\sqrt{5},-12)$

Ecuación asíntotas: $y=2x$; $y=-2x$.

Ecuación del eje focal: $y=0$ (eje x).

Ecuación del eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

EJERCICIOS

En cada uno de los incisos del 1 al 3, se da la ecuación de una hipérbola, obtenga sus elementos y bosqueje su gráfica.

1) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$

2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

3) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{9}=1$

4) Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, $a=6$, $e=\frac{4}{3}$ y el eje focal sobre el eje y.

5) Obtener la ecuación de la hipérbola conjugada de $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{28}=1$, sus elementos y bosquejar su gráfica.

11.4. FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN Y EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

En forma análoga a la elipse, las ecuaciones $(\mathrm{I}) \cdots \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $(\mathrm{II}) \cdots \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ nos muestran la siguiente PROPIEDAD ESENCIAL de la hipérbola, que sirve para obtener su ecuación en cualquier posición. En esta sección nos limitaremos únicamente a hipérbolas horizontales y verticales con centro fuera del origen.

PROPIEDAD ESENCIAL:

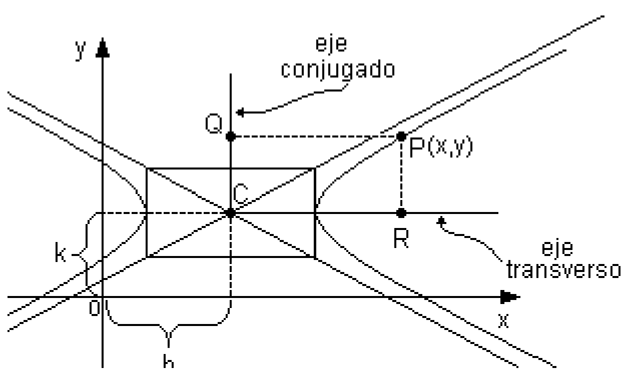
En las ecuaciones (I) y (II), el primero y segundo términos significan:

$$\frac{(La\ distancia\ de\ un\ punto\ cualquiera\ "P"\ de\ la\ hipérbola\ al\ eje\ conjugado)^2}{(Magnitud\ del\ semieje\ transverso)^2} -$$

$$- \frac{(La\ distancia\ de\ un\ punto\ cualquiera\ "P"\ de\ la\ hipérbola\ al\ eje\ transverso)^2}{(Magnitud\ del\ semieje\ conjugado)^2}$$

Apliquemos esta propiedad para obtener la ecuación de la hipérbola con centro fuera del origen y ejes paralelos a los ejes coordenados:

a) Si el centro tiene coordenadas $C(h,k)$ y el eje focal es paralelo al eje x como se muestra en la figura, al aplicar la propiedad esencial se tiene:



$$\frac{(PQ)^2}{a^2} - \frac{(PR)^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

donde $PQ = x-h$; $PR = y-k$

sustituyendo en (i):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \cdots(\mathrm{III})$$

Esta es la ecuación de la hipérbola en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje x (hipérbola horizontal).

b) Si el centro tiene coordenadas $C(h,k)$ y el eje focal es paralelo al eje "y" como se muestra en la figura, aplicando la propiedad esencial se tiene:

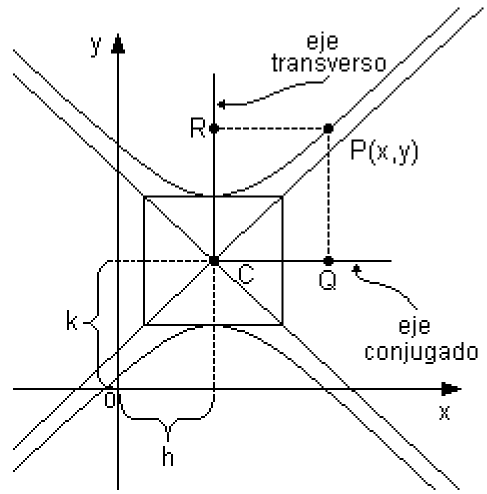
$$\frac{(PQ)^2}{a^2}-\frac{(PR)^2}{b^2}=1 \quad \ldots(ii)$$

donde $PQ = y-k$; $PR = x-h$

sustituyendo en (ii):

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \quad \cdots (\text{IV})$$

(IV) es la ecuación de la hipérbola en forma ordinaria con centro $C(h,k)$ y eje focal (transverso) paralelo al eje y (hipérbola vertical).



Si las coordenadas del centro fueran $C(0,0)$, las ecuaciones (III) y (IV) se reducirán a las ecuaciones (I) y (II):

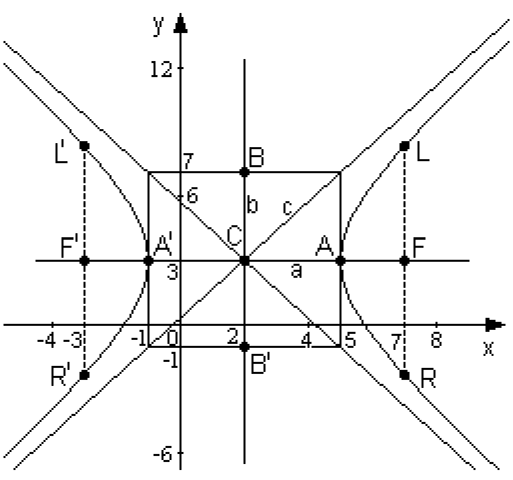
$$\frac{(x-0)^2}{a^2}-\frac{(y-0)^2}{b^2}=1 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots (\text{I})$$

$$\frac{(y-0)^2}{a^2}-\frac{(x-0)^2}{b^2}=1 \;\rightarrow\; \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \cdots (\text{II})$$

EJEMPLOS

1) La ecuación de una hipérbola es $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$, obtener sus elementos y bosquejar su gráfica.

Solución



La ecuación dada es de la forma:

(III) $\cdots$ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal), la cual nos proporciona los siguientes datos: las coordenadas del centro $C(h,k)=(2,3)$; $a^2=9$; $a=3$; $b^2=16$; $b=4$; y como $c^2=a^2+b^2$; $c=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$ $c=5$. Con estos datos ya podemos calcular los elementos de la hipérbola para bosquejar su gráfica en forma análoga a las hipérbolas de la forma (I) y (II).

A partir del centro $C(2,3)$, se construye el rectángulo principal y se trazan sus diagonales (asíntotas) luego se ubican sus elementos a partir del centro y en forma análoga como en las ecuaciones de la forma (I) y (II).

$C(h,k)=(2,3)$; $A(h+a,k)=(5,3)$; $B(h,k+b)=(2,7)$; $F(h+c,k)=(7,3)$; $L\left(h+c,k+\frac{b^2}{a}\right)=\left(7,\frac{25}{3}\right)$.

Por simetría: $A'(h-a,k)=(-1,3)$; $B'(h,k-b)=(2,-1)$; $F'(h-c,k)=(-3,3)$

$L'\left(h-c,k+\dfrac{b^2}{a}\right)=\left(-3,\dfrac{25}{3}\right)$; $R\left(h+c,k-\dfrac{b^2}{a}\right)=\left(7,-\dfrac{7}{3}\right)$; $R'\left(h-c,k-\dfrac{b^2}{a}\right)=\left(-3,-\dfrac{7}{3}\right)$.

Ecuación de las asíntotas: son 2 rectas que pasan por el punto $C(2,3)$ y que tienen pendiente $m=\pm\dfrac{b}{a}=\pm\dfrac{4}{3}$ o sea: $y-3=\pm\dfrac{4}{3}(x-2)$; $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$ y $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{17}{3}$.

Ecuación del eje focal (o transverso): $y=3$ (recta horizontal).

Ecuación del eje conjugado: $x=2$ (recta vertical).

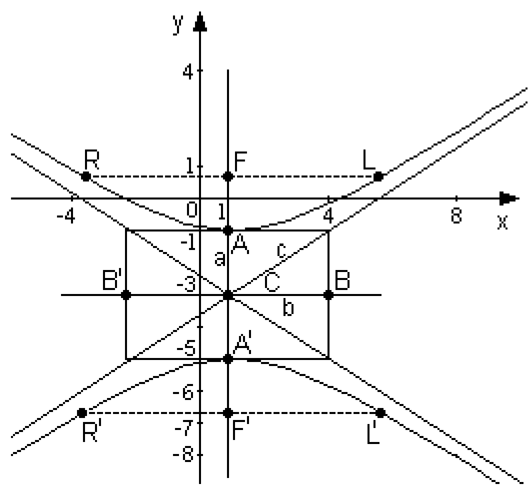
Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$

2) Obtener la ecuación y el bosquejo de la gráfica de la hipérbola con centro $C(1,-3)$ y vértices $A(1,-1)$, $B(4,3)$.

<u>Solución</u>

De acuerdo con la información dada, la ecuación de esta hipérbola es de la forma:

$(\boxed{IV})\cdots\ \dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ (hipérbola vertical), en donde $CA=a$; $a=2$; $CB=b$; $b=3$ y $c^2=a^2+b^2=4+9$; $c=\sqrt{13}$; $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$; la ecuación es: $\dfrac{(y+3)^2}{4}-\dfrac{(x-1)^2}{9}=1$.



Elementos: $C(h,k)=(1,-3)$; $A(h,k+a)=(1,-1)$

$B(h+b,k)=(4,-3)$; $F(h,k+c)=\left(1,-3+\sqrt{13}\right)$

$L\left(h+\dfrac{b^2}{a},k+c\right)=\left(\dfrac{11}{2},-3+\sqrt{13}\right)$.

Por simetría: $A'(h,k-a)=(1,-5)$; $B'(h-b,k)=(-2,-3)$; $F'(h,k-c)=\left(1,-3-\sqrt{13}\right)$;

$L'\left(h+\dfrac{b^2}{a},k-c\right)=\left(\dfrac{11}{2},-3-\sqrt{13}\right)$; $R\left(h-\dfrac{b^2}{a},k+c\right)=\left(-\dfrac{7}{2},-3+\sqrt{13}\right)$;

$R'\left(h-\dfrac{b^2}{a},k-c\right)=\left(-\dfrac{7}{2},-3-\sqrt{13}\right)$

Ecuación asíntotas: $y+3=\pm\dfrac{2}{3}(x-1)$; $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{11}{3}$ y $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3}$

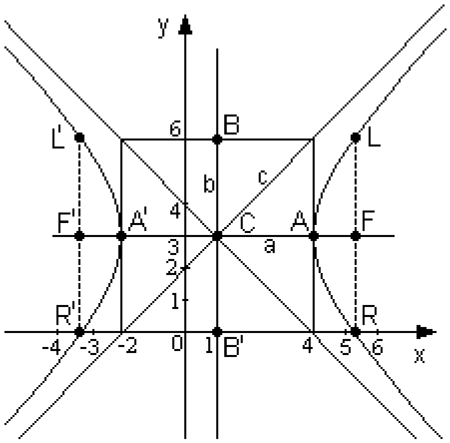
Ecuación eje focal: $x=1$ (recta vertical).

Ecuación eje conjugado: $y=-3$ (recta horizontal).

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

3) Obtener la ecuación de la hipérbola con extremos del eje transverso $A'(-2,3)$, $A(4,3)$, foco $F\left(1+3\sqrt{2},3\right)$ y bosquejar su gráfica.

Solución



De acuerdo con la información dada, la ecuación de la hipérbola es de la forma (III)••• $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal). El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento $A'A$: $C\left(\dfrac{x_{A'}+x_A}{2},\dfrac{y_{A'}+y_A}{2}\right)=(1,3)$

$CA=a=4-1=3$; $CF=c=1+3\sqrt{2}-1$; $c=3\sqrt{2}$

si $c^2=a^2+b^2$; $b^2=c^2-a^2=18-9=9$; $b=3$; $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{9}{3}=3$

como $a=b$; $3=3$. La hipérbola es equilátera y su ecuación es: $\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

Elementos: $C(1,3)$; $A(4,3)$; $B(1,6)$; $F\left(1+3\sqrt{2},3\right)$; $L\left(1+3\sqrt{2},6\right)$.

Por simetría: $A'(-2,3)$; $B'(1,6)$; $F'\left(1-3\sqrt{2},3\right)$; $L'\left(1-3\sqrt{2},6\right)$; $R\left(1+3\sqrt{2},0\right)$; $R'\left(1-3\sqrt{2},0\right)$

Ecuación asíntotas: $y-3=\pm 1(x-1)$; $y=x+2$; $y=-x+4$

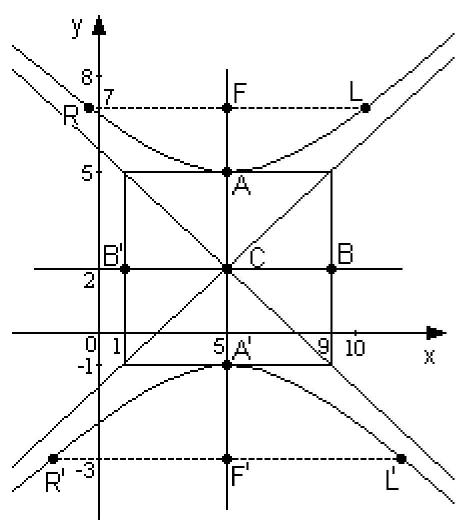
Ecuación eje transverso: $y=3$.

Ecuación eje conjugado: $x=1$.

Excentricidad: $e=\sqrt{2}$

4) Obtener la ecuación de la hipérbola con centro $C(5,2)$, foco $F(5,7)$, excentricidad $e=\dfrac{5}{3}$ y bosquejar su gráfica.

Solución



De acuerdo con los datos del problema, la ecuación de la hipérbola es de la forma (IV)••• $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ (hipérbola vertical). El segmento $CF=c=7-2$; $c=5$

Si $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$; $a=3$; $b^2=c^2-a^2=25-9=16$; $b=4$

$\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{16}{3}$. Ecuación: $\dfrac{(y-2)^2}{9}-\dfrac{(x-5)^2}{16}=1$

Elementos: $C(5,2)$; $A(5,5)$; $B(9,2)$; $F(5,7)$; $L\left(\dfrac{31}{3},7\right)$.

Por simetría: $A'(5,-1)$; $B'(1,2)$; $F'(5,-3)$

$L'\left(\dfrac{31}{3},-\dfrac{10}{3}\right)$; $R\left(-\dfrac{1}{3},7\right)$; $R'\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{10}{3}\right)$

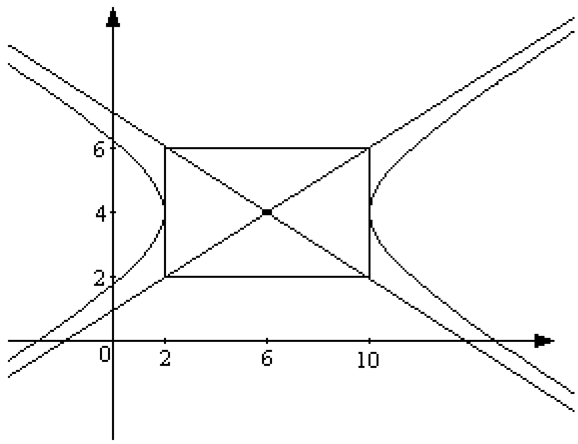
Ecuación asíntotas: $y-2=\pm\frac{3}{4}(x-5)$; $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$; $y=-\frac{3}{4}x+\frac{23}{4}$

Ecuación eje transverso: $x=5$.

Ecuación eje conjugado: $y=2$.

Excentricidad: $e=\frac{5}{3}$

5) Obtener la ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas en la siguiente gráfica, y sus elementos.



Solución

La ecuación de la hipérbola es de la forma (III)••• $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (hipérbola horizontal).

A simple vista podemos decir que $C(6,4)$; $A(10,4)$; $B(6,6)$; $A'(2,4)$; $B'(6,2)$, por lo tanto $a=4$; $b=2$ y como $c^2=a^2+b^2=16+4=20$; $c=2\sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a}=1$; ecuación: $\frac{(x-6)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{4}=1$

Los elementos restantes son: $F(6+2\sqrt{5},4)$; $L(6+2\sqrt{5},5)$; $F'(6-2\sqrt{5},4)$; $L'(6-2\sqrt{5},5)$; $R(6+2\sqrt{5},3)$; $R'(6-2\sqrt{5},3)$.

Ecuación asíntotas: $y-4=\pm\frac{1}{2}(x-6)$; $y=\frac{1}{2}x+1$; $y=-\frac{1}{2}x+7$

Ecuación eje transverso: $y=4$.

Ecuación eje conjugado: $x=6$.

Excentricidad: $e=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

EJERCICIOS

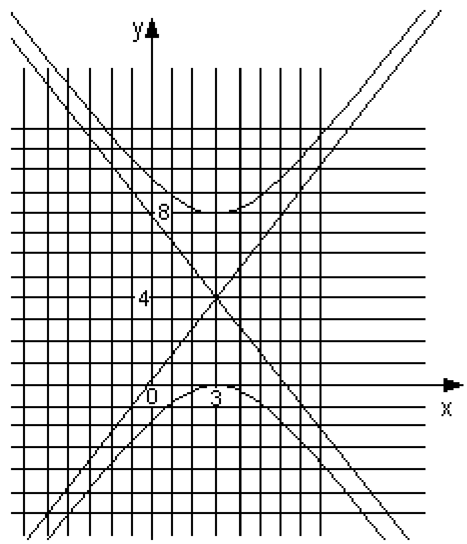
1) Obtenga los elementos de la hipérbola $\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x+3)^2}{9}=1$ y bosque su gráfica.

2) Obtener la ecuación, los elementos y el bosquejo de la gráfica de la hipérbola con vértices $A(8,-4)$, $A'(-4,-4)$ y $LR=3$.

3) Una hipérbola tiene centro $C(5,0)$, foco $F(9,0)$, excentricidad $e=2$, obtenga su ecuación, sus elementos y bosqueje su gráfica.

4) Un extremo del eje conjugado de una hipérbola tiene coordenadas $B(6,4)$, su centro $C(3,4)$ y $L\left(\frac{21}{4},9\right)$, obtenga la ecuación, sus elementos y bosqueje su gráfica.

5) Obtenga la ecuación y los elementos de la hipérbola que satisfaga las condiciones indicadas en la siguiente gráfica.



11.5. FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

En forma análoga a la elipse, si en las ecuaciones (III)... $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y (IV)... $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ multiplicamos por a^2b^2, desarrollamos los cuadrados, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos la ecuación en FORMA GENERAL de la hipérbola $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados, donde los coeficientes A y C son de signo contrario, los coeficientes de primer grado D y E indican que el centro de la hipérbola está fuera del origen, si $D=0$ el centro está sobre el eje "y", si $E=0$ estará sobre el eje "x", el término independiente F indica que la hipérbola no pasa por el origen y si $F=0$ entonces si pasa por el origen.

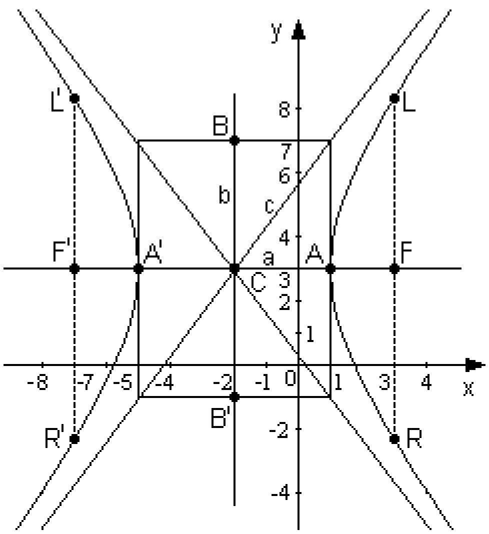
Recíprocamente, cuando la ecuación de una hipérbola es dada en forma general, puede obtenerse su forma ordinaria mediante el método de completar cuadrados y así conocer sus elementos para bosquejar su gráfica.

EJEMPLOS

En cada inciso se da la ecuación de una hipérbola en forma general, obtener su forma ordinaria, sus elementos y bosquejar su gráfica.

1) $16x^2 - 9y^2 + 64x + 54y - 161 = 0$

<u>Solución</u>



Se ordena la ecuación dada como sigue:

$16x^2 + 64x - 9y^2 + 54y = 161$

factorizando y completando cuadrados:

$16\left(x^2 + 4x\right) - 9\left(y^2 - 6y\right) = 161$

$16\left[x^2 + 4x + (2)^2\right] - 9\left[y^2 - 6y + (3)^2\right] = 161 + 64 - 81$

$16(x+2)^2 - 9(y-3)^2 = 144$

dividiendo entre 144:

$$\frac{16(x+2)^2}{144} - \frac{9(y-3)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{144}{16}} - \frac{(y-3)^2}{\frac{144}{9}} = 1; \quad \boxed{\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1} \text{ Forma ordinaria}$$

$a^2 = 9$; $a = 3$; $b^2 = 16$; $b = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$; $c = 5$; $\frac{b^2}{a} = \frac{16}{3}$

Elementos: $C(-2,3)$; $A(1,3)$; $B(-2,7)$; $F(3,3)$; $L\left(3, \frac{25}{3}\right)$

Por simetría: $A'(-5,3)$; $B'(-2,-1)$; $F'(-7,3)$; $L'\left(-7, \frac{25}{3}\right)$; $R\left(3, -\frac{7}{3}\right)$; $R'\left(-7, -\frac{7}{3}\right)$

Ecuación asíntotas: $y - 3 = \pm\frac{4}{3}(x+2)$; $y = \frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$; $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

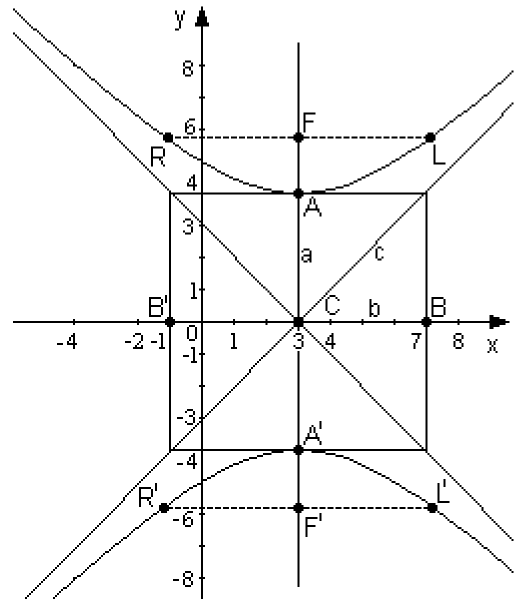
Ecuación eje transverso: $y = 3$.

Ecuación eje conjugado: $x = -2$.

Excentricidad: $e = \frac{5}{3}$

2) $2y^2 - 2x^2 + 12x - 50 = 0$

Solución



Observar que en la ecuación dada no aparece el término de primer grado en "y", o sea que el coeficiente $E = 0$, por lo tanto el centro de la hipérbola estará sobre el eje x.

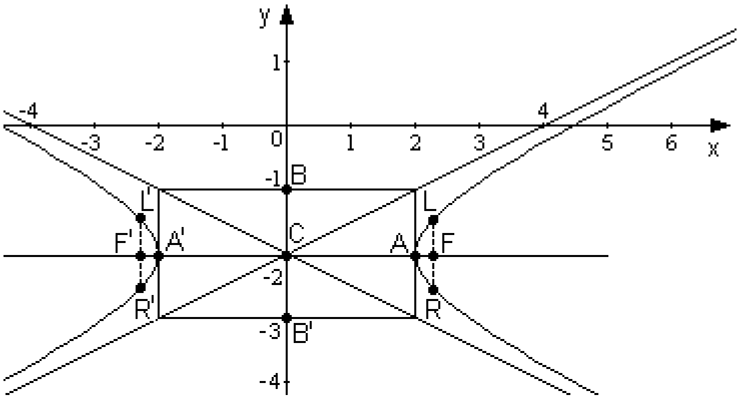
Dividiendo la ecuación dada entre 2 se tiene:
$y^2 - x^2 + 6x - 25 = 0$
factorizando y completando cuadrados:
$y^2 - \left(x^2 - 6x + (3)^2\right) = 25 - 9$
$y^2 - (x-3)^2 = 16$
dividiendo entre 16: $\frac{y^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$ forma ordinaria, se trata de una hipérbola equilátera vertical, en donde
$a^2 = b^2 = 16$; $a = b = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 32$; $c = 4\sqrt{2}$; $\frac{b^2}{a} = 4$
Elementos: $C(3,0)$; $A(3,4)$; $B(7,0)$; $F\left(3,4\sqrt{2}\right)$; $L\left(7,4\sqrt{2}\right)$
Por simetría: $A'(3,-4)$; $B'(-1,0)$; $F'\left(3,-4\sqrt{2}\right)$; $L'\left(7,-4\sqrt{2}\right)$; $R\left(-1,4\sqrt{2}\right)$; $R'\left(-1,-4\sqrt{2}\right)$
Ecuación asíntotas: $y = \pm 1(x-3)$; $y = x - 3$; $y = -x + 3$
Ecuación eje transverso: $x = 3$.
Ecuación eje conjugado: $y = 0$ (eje x).
Excentricidad: $e = \sqrt{2}$

3) $3x^2 - 12y^2 - 48y - 60 = 0$

Solución

Como no hay término en "x", el coeficiente $D = 0$, la hipérbola tendrá su centro sobre el eje "y".
Dividiendo la ecuación dada entre 3 se obtiene: $x^2 - 4y^2 - 16y - 20 = 0$
factorizando y completando cuadrados:
$x^2 - 4\left(y^2 + 4y\right) = 20$
$x^2 - 4\left(y^2 + 4y + (2)^2\right) = 20 - 16$
$x^2 - 4(y+2)^2 = 4$
Dividiendo entre 4: $\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{\frac{4}{4}} = \frac{4}{4}$

$\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{1} = 1$ Forma ordinaria, es la ecuación de una hipérbola horizontal, donde:



$a^2 = 4$; $a = 2$; $b^2 = 1$; $b = 1$;

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1$; $c = \sqrt{5}$; $\dfrac{b^2}{a} = \dfrac{1}{2}$

Elementos: $C(0,-2)$; $A(2,-2)$; $B(0,-1)$;

$F(-\sqrt{5},-2)$; $L\left(\sqrt{5},-\dfrac{3}{2}\right)$

Por simetría: $A'(-2,-2)$; $B'(0,-3)$;

$F'(\sqrt{5},-2)$; $L'\left(-\sqrt{5},-\dfrac{3}{2}\right)$; $R\left(\sqrt{5},-\dfrac{5}{2}\right)$;

$R'\left(-\sqrt{5},-\dfrac{5}{2}\right)$

Ecuación asíntotas: $y + 2 = \pm\dfrac{1}{2}(x - 0)$; $y = \dfrac{1}{2}x - 2$; $y = -\dfrac{1}{2}x - 2$

Ecuación eje transverso: $y = -2$.

Ecuación eje conjugado: $x = 0$ (eje y).

Excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

4) $4y^2 - 2x^2 + 8x + 16y = 0$

Solución

La ecuación dada carece de término independiente ($F = 0$), por lo tanto se trata de una hipérbola que pasa por el origen.

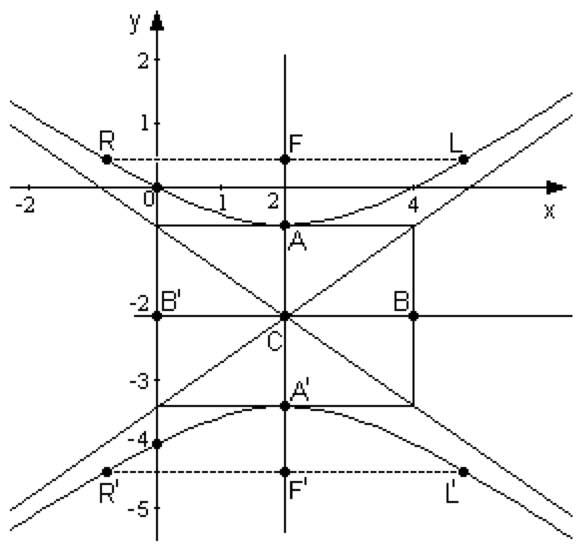
Dividiendo la ecuación dada entre 2 se obtiene: $2y^2 - x^2 + 4x + 8y = 0$, ordenando, factorizando y completando cuadrados:

$2y^2 + 8y - x^2 + 4x = 0$

$2\left(y^2 + 4y + (2)^2\right) - \left(x^2 - 4x + (2)^2\right) = 8 - 4$

$2(y + 2)^2 - (x - 2)^2 = 4$

Dividiendo entre 4: $\dfrac{(y+2)^2}{\dfrac{4}{2}} - \dfrac{(x-2)^2}{4} = \dfrac{4}{4}$



$\dfrac{(y+2)^2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{4} = 1$ Forma ordinaria, es la ecuación de una hipérbola vertical, donde:

$a^2 = 2$; $a = \sqrt{2}$; $b^2 = 4$; $b = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 2 + 4 = 6$; $c = \sqrt{6}$; $\dfrac{b^2}{a} = 2\sqrt{2}$

Elementos: $C(2,-2)$; $A\left(2,-2+\sqrt{2}\right)$; $B(4,-2)$; $F\left(2,-2+\sqrt{6}\right)$; $L\left(2+2\sqrt{2},-2+\sqrt{6}\right)$

Por simetría: $A'\left(2,-2-\sqrt{2}\right)$; $B'(0,-2)$; $F'\left(2,-2-\sqrt{6}\right)$; $L'\left(2+2\sqrt{2},-2-\sqrt{6}\right)$; $R\left(2-2\sqrt{2},-2+\sqrt{6}\right)$; $R'\left(2-2\sqrt{2},-2-\sqrt{6}\right)$

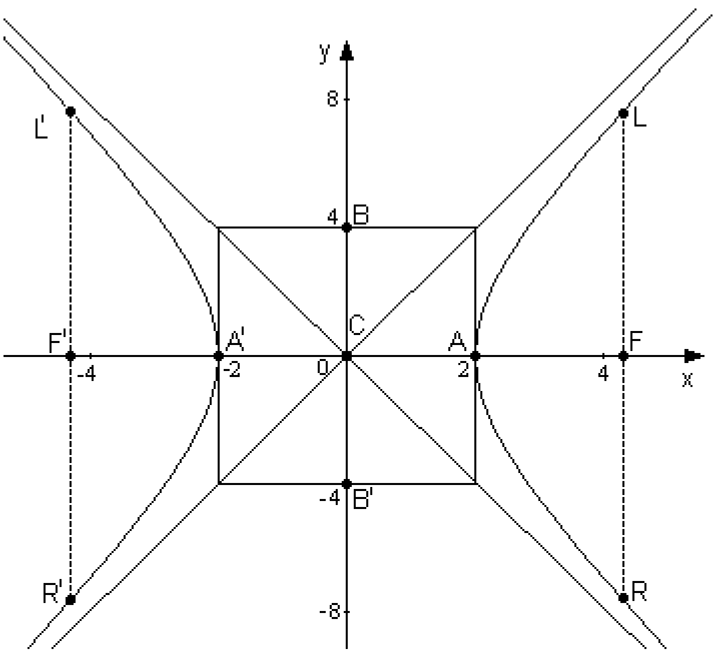
Ecuación asíntotas: $y+2=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}-2$; $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}-2$

Ecuación eje transverso: $x=2$; Ecuación eje conjugado: $y=-2$; Excentricidad: $e=\sqrt{3}$

5) $16x^2-4y^2-64=0$

Solución

La ecuación dada carece de términos de primer grado o sea que $D=E=0$, por lo tanto se trata de una hipérbola con centro en el origen. Ordenando términos y dividiendo entre 64:



$$\frac{\frac{x^2}{64}}{\frac{64}{16}}-\frac{\frac{y^2}{64}}{\frac{64}{4}}=\frac{64}{64}$$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ Forma ordinaria, es la ecuación de una hipérbola horizontal, donde: $a^2=4$; $a=2$; $b^2=16$; $b=4$; $c^2=a^2+b^2=20$; $c=2\sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a}=8$

Elementos: $C(0,0)$; $A(2,0)$; $B(0,4)$; $F\left(2\sqrt{5},0\right)$; $L\left(2\sqrt{5},8\right)$

Por simetría: $A'(-2,0)$; $B'(0,-4)$; $F'\left(-2\sqrt{5},0\right)$; $L'\left(-2\sqrt{5},8\right)$; $R\left(2\sqrt{5},-8\right)$; $R'\left(-2\sqrt{5},-8\right)$

Ecuación asíntotas: $y=2x$; $y=-2x$

Ecuación eje transverso: $y=0$ (eje x).

Ecuación eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\sqrt{5}$

EJERCICIOS

En cada inciso se da la ecuación de una hipérbola en forma general, obtenga su forma ordinaria, sus elementos y bosqueje su gráfica.

1) $9y^2-16x^2-64x-54y-127=0$

2) $3x^2-3y^2-24x+21=0$

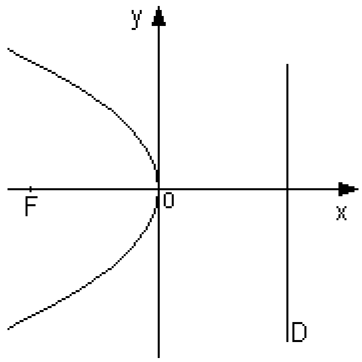
3) $4y^2-x^2+16y+12=0$

4) $x^2-2y^2-8x+8y=0$

5) $4y^2-x^2-4=0$

AUTOEVALUACIÓN DE LOS CAPÍTULOS DEL IX AL XI

1) La forma de la ecuación de la siguiente parábola es:



a) $x^2 = 4py$ b) $x^2 = -4py$

c) $y^2 = -4px$ d) $y^2 = 4px$

2) La ecuación en forma ordinaria de la parábola con vértice $V(0,0)$ y foco $F(0,3)$ es:

a) $y^2 = 3x$ b) $x^2 = -12y$ c) $y^2 = -3x$ d) $x^2 = 12y$

3) La ecuación en forma general de la parábola con foco $F(2,2)$ y directriz $x = -2$, es:

a) $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ b) $x^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ c) $y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

d) $x^2 + 8y - 4y + 4 = 0$

4) Las coordenadas del vértice y el foco de la parábola $x^2 + 4x - 8y + 20 = 0$, son:

a) $V(2,2)$, $F(2,4)$ b) $V(-2,2)$, $F(-2,4)$ c) $V(-3,3)$, $F(-3,5)$ d) $V(3,-3)$, $F(3,5)$

5) La ecuación en forma general de la parábola horizontal con vértice $V(3,-4)$ y que pasa por el punto $P(4,-5)$, es:

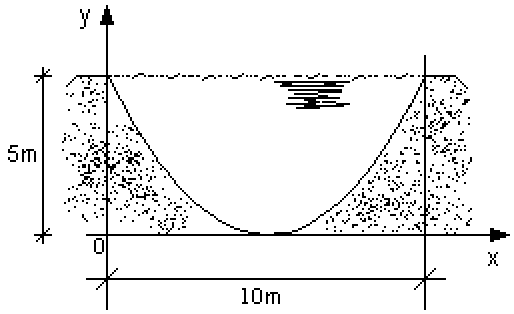
a) $y^2 + x - 8y + 19 = 0$ b) $y^2 + x + 8y + 19 = 0$ c) $y^2 - x + 8y - 19 = 0$

d) $y^2 - x + 8y + 19 = 0$

6) Si a la parábola $(y-2)^2 = 8(x-4)$ se traslada el origen al punto $(4,2)$, la ecuación que resulta toma la forma:

a) $y'^2 = -8x'$ b) $y'^2 = 2x'$ c) $y'^2 = 8x'$ d) $y'^2 = -2x'$

7) Se va a construir un canal que conducirá agua, en forma de arco parabólico con las dimensiones indicadas en la figura, ¿cuál es su ecuación?



a) $x^2 - 10x - 5y + 25 = 0$ b) $x^2 + 10x - 5y + 25 = 0$

c) $x^2 - 10x + 5y + 25 = 0$ d) $x^2 + 10x + 5y + 25 = 0$

8) Una elipse vertical con centro en el origen, tiene ecuación ordinaria:

a) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ b) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ d) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

9) Los vértices de una elipse son $A(0,5)$, $B(3,0)$, con centro en el origen, su ecuación en forma ordinaria es:

a) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$ d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

10) La excentricidad de una elipse tiene valores:

a) $e = 0$ b) $0 < e < 1$ c) $-1 < e < 0$ d) $e > 0$

11) La ecuación en forma general de la elipse con centro $C(0,0)$, foco $F(4,0)$ y vértice $B(0,3)$, es:

a) $9x^2 + 25y^2 + 225 = 0$ b) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ c) $9x^2 + 25y^2 + 125 = 0$

d) $9x^2 + 25y^2 - 125 = 0$

12) Las coordenadas de los focos de la elipse $\frac{(y+2)^2}{36} + \frac{(x-6)^2}{16} = 1$, son:

a) $F\left(6,-2+2\sqrt{5}\right)$ $F'\left(6,-2-2\sqrt{5}\right)$ b) $F\left(-2+2\sqrt{5},6\right)$ $F'\left(-2-2\sqrt{5},6\right)$ c) $F\left(2+2\sqrt{5},6\right)$ $F'\left(2-2\sqrt{5},6\right)$

d) $F\left(6,2+2\sqrt{5}\right)$ $F'\left(6,2-2\sqrt{5}\right)$

13) La ecuación en forma ordinaria de la elipse $9x^2+4y^2+54x-8y+49=0$, es:

a) $\dfrac{(y-1)^2}{4}+\dfrac{(x+3)^2}{9}=1$ b) $\dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ c) $\dfrac{(y-1)^2}{9}+\dfrac{(x+3)^2}{4}=1$

d) $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

14) La ecuación en forma general de la elipse con excentricidad $e=\dfrac{1}{3}$ y vértices $A(1,7)$, $A'(1,-5)$, es:

a) $9x^2+8y^2-18x-16y-271=0$ b) $9x^2+8y^2+18x-16y-271=0$

c) $9x^2+8y^2-18x+16y-271=0$ d) $9x^2+8y^2+18y+16x-271=0$

15) En la ecuación general $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, para que represente a una hipérbola, los coeficientes A y C deben ser:

a) Positivos b) Negativos c) Nulos d) De signo contrario

16) La forma ordinaria de la ecuación de una hipérbola horizontal es:

a) $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}+\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ b) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ c) $\dfrac{(x-k)^2}{b^2}+\dfrac{(y-h)^2}{a^2}=1$

d) $\dfrac{(x-k)^2}{a^2}-\dfrac{(y-h)^2}{b^2}=1$

17) La ecuación general de la hipérbola $\dfrac{(x-6)^2}{6}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$, es:

a) $x^2-2y^2-12x-4y+28=0$ b) $x^2-2y^2+12x-4y+28=0$

c) $x^2-2y^2-12x+4y+28=0$ d) $x^2-2y^2-12x+4y-28=0$

18) Las coordenadas del centro y los focos de la hipérbola $16x^2-9y^2-32x-54y-209=0$, son:

a) $C(1,3)$, $F(6,3)$, $F'(-4,3)$ b) $C(1,-3)$, $F(6,-3)$, $F'(4,-3)$

c) $C(1,-3)$, $F(6,-3)$, $F'(-4,-3)$ d) $C(1,-3)$, $F(-6,-3)$, $F'(-4,-3)$

19) La excentricidad de una hipérbola es $e=\sqrt{2}$ y su vértice tiene coordenadas $A(4,2)$, su ecuación es:

a) $x^2-y^2+4x+4y-1=0$ b) $x^2-y^2-4x-4y-1=0$

c) $x^2-y^2+4x-4y-1=0$ d) $x^2-y^2-4x+4y-1=0$

20) Las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $y^2-x^2-4=0$, son:

a) $\begin{array}{c} y=x \\ y=-x \end{array}$ b) $\begin{array}{c} y=2x \\ y=-2x \end{array}$ c) $\begin{array}{c} y=x+1 \\ y=-x+1 \end{array}$ d) $\begin{array}{c} y=2x+1 \\ y=-2x-1 \end{array}$

HOJA DE RESPUESTAS DE LA AUTOEVALUACIÓN DE LOS CAPÍTULOS DEL IX AL XI

1	a	b	c	d
2	a	b	c	d
3	a	b	c	d
4	a	b	c	d
5	a	b	c	d
6	a	b	c	d
7	a	b	c	d
8	a	b	c	d
9	a	b	c	d
10	a	b	c	d
11	a	b	c	d
12	a	b	c	d
13	a	b	c	d
14	a	b	c	d
15	a	b	c	d
16	a	b	c	d
17	a	b	c	d
18	a	b	c	d
19	a	b	c	d
20	a	b	c	d

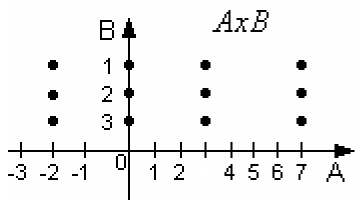
Para obtener tu calificación, aplica la siguiente fórmula:

$$Calificaci\acute{o}n = \left[N^\circ \; de \; respuestas \; correctas - \frac{N^\circ \; de \; incorrectas}{3} \right](5)$$

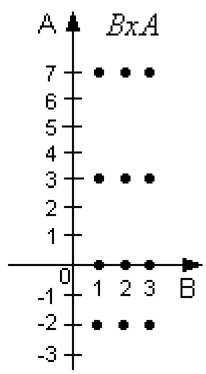
SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO I

1.1. PRODUCTO CARTESIANO

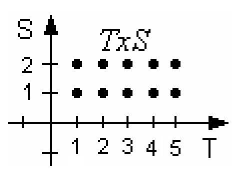
1) $AxB=\{(-2,1),(-2,2),(-2,3),(0,1),(0,2),(0,3),(3,1),(3,2),(3,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$



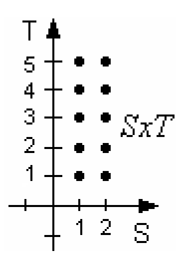
$BxA=\{(1,-2),(1,0),(1,3),(1,7),(2,-2),(2,0),(2,3),(2,7),(3,-2),(3,0),(3,3),(3,7)\}$



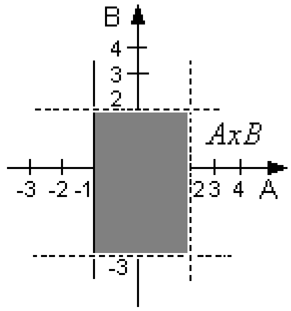
2) $TxS=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$

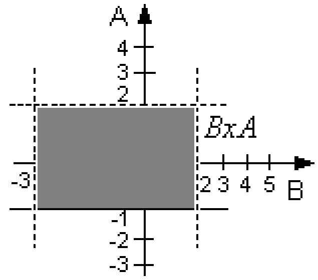


$SxT=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

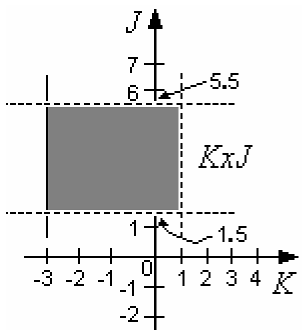


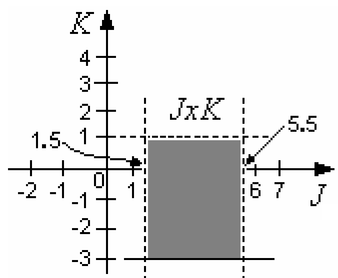
3)


B
4
3
2
AxB
-3 -2 -1
2 3 4 A
-3

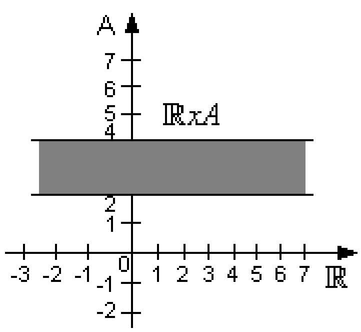

A
4
3
2
BxA
-3
2 3 4 5 B
-1
-2
-3

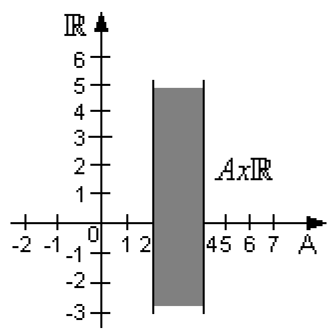
4)


J
7
6
5.5
KxJ
1
1.5
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 K
-1
-2


K
4
3
2
1
JxK
5.5
1.5
-2 -1 0 1 6 7 J
-1
-2
-3

5)


A
7
6
5
4
ℝxA
2
1
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 ℝ
-1
-2

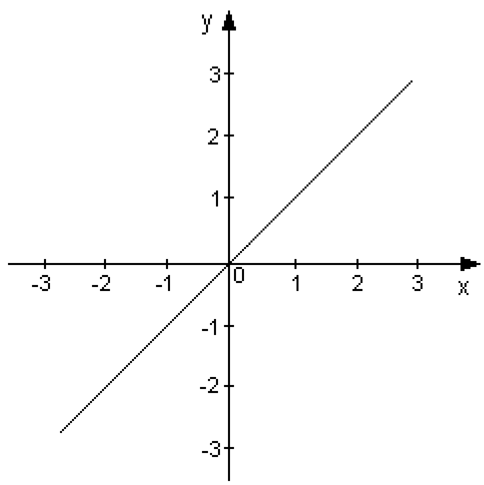

ℝ
6
5
4
3
2
1
Axℝ
-2 -1 0 1 2 4 5 6 7 A
-1
-2
-3

1.2. RELACIONES

1) Por ejemplo:

x	-3	-2	0	1
y	-3	-2	0	1

2)



3) Un número "y" es igual a la raíz cuadrada de otro número "x".

4) $y^2 = 4 - x^2$

5)

x	-2	-1	-1	0	0	2	2
y	0	-1	$+1$	$-\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	-2	$+2$

6) $y^2 = x + 2$

Relaciones Implícitas y Explícitas

1) $y^2 - 3x - 6y + 8 = 0$

Solución

Por fórmula general de 2° grado en "y"

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad a = 1; \; b = -6; \; c = -3x + 8$$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-3x+8)}}{2(1)}$$
$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(-3x+8)}}{2}$$
$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12x - 32}}{2}$$
$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12x + 4}}{2}$$
$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4(3x+1)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}\sqrt{3x+1}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3x+1}}{2}$$
$$y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3x+1}$$

2) $3x - 2y + 5 = 0$

Solución

$$-2y = -3x - 5$$
$$(-1)(-2y) = (-1)(-3x-5)$$
$$2y = 3x + 5$$
$$y = \frac{3x+5}{2}$$
$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

3) $9xy - 3y - 6x - 12 = 0$

Solución

$$\frac{9xy - 3y - 6x - 12}{3} = \frac{0}{3}$$
$$3xy - y - 2x - 4 = 0$$
$$3xy - y = 2x + 4$$
$$y(3x-1) = 2(x+2)$$
$$y = \frac{2(x+2)}{(3x-1)}$$

4) $4x^2 + 6xy + \dfrac{2x^2}{5} = 18 - 4xy$

Solución

$$4x^2 + \frac{2}{5}x^2 + 6xy + 4xy = 18$$
$$\frac{20x^2 + 2x^2}{5} + 10xy = 18$$
$$\frac{22}{5}x^2 + 10xy = 18$$
$$10xy = 18 - \frac{22}{5}x^2$$
$$10xy = \frac{18(5) - 22x^2}{5}$$
$$10xy = \frac{90 - 22x^2}{5}$$
$$y = \frac{\frac{90-22x^2}{5}}{10x} = \frac{\frac{90-22x^2}{5}}{\frac{10x}{1}} = \frac{(1)(90-22x^2)}{(10x)(5)}$$
$$y = \frac{90 - 22x^2}{50x}$$

5) $-8x = x^2 + 2xy$

Solución

$$-2xy = x^2 + 8x$$
$$(-1)(-2xy) = (-1)(x^2 + 8x)$$
$$2xy = -(x^2 + 8x)$$
$$y = \frac{-(x^2 + 8x)}{2x}$$
$$y = \frac{-(x+8)}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x - 4$$

1.3. FUNCIONES

1) $xy = 1$

Solución

Si es función, ya que para cada valor de "x", le corresponde uno de "y", por tanto se puede expresar como:

$$y = \frac{1}{x} \;;\; \left(x, \frac{1}{x}\right) \;;\; f(x): \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \text{ donde } f(x) = \frac{1}{x} \;;\; p = \frac{1}{q}$$

2) $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$

Solución

Primero se despeja "y":

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1$$
$$(x - y)^2 = 1$$
$$(x - y) = \pm\sqrt{1}$$
$$-y = -x \pm 1$$
$$(-1)(-y) = (-1)(-x \pm 1)$$
$$y = x \pm 1$$

No es función, ya que para cada valor de "x", le corresponden dos valores a "y".

3) $\ln x^y = 4$

Solución

Primero se despeja "y": por la propiedad $\ln x^n = n \ln x$

$$y \ln x = 4$$
$$y = \frac{4}{\ln x}$$

Si es función, porque a cada valor de "x", le corresponde uno de "y", por lo que se puede expresar como:

$$y = \frac{4}{\ln x} \;;\; \left(x, \frac{4}{\ln x}\right) \;;\; f(x): \mathbb{R}^+ - \{1\} \to \mathbb{R} \text{ donde } f(x) = \frac{4}{\ln x} \;;\; p = \frac{4}{\ln q}$$

Otra forma de denotar el dominio de esta función es: $D = \mathbb{R}^+ - \{1\} = (0,1) \cup (1, \infty)$

4) $3x^2 + 3y^2 = 6$

Solución

Primero se despeja "y":

$$3y^2 = 6 - 3x^2$$
$$y^2 = \frac{6 - 3x^2}{3} = 2 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{2 - x^2}$$

No es función, porque a cada valor de "x", le corresponden dos valores de "y".

5) $x^2 + y\cos 2x = 4$

Solución

Primero se despeja "y":

$$y\cos 2x = 4 - x^2$$
$$y = \frac{4 - x^2}{\cos 2x}$$

Si es función, porque a cada valor de "x", le corresponde uno de "y", por lo que se puede expresar como:

$y = \dfrac{4 - x^2}{\cos 2x}$; $\left(x, \dfrac{4 - x^2}{\cos 2x}\right)$; $f(x) : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{\cos 2x}$; $p = \dfrac{4 - q^2}{\cos 2q}$

1.4. DOMINIO Y RANGO

1) $2x + 3y + 1 = 0$

Solución

Esta función está dada en forma implícita, al despejar a la variable "y" se tiene $3y = -2x - 1$; $y = \dfrac{-2x - 1}{3}$; $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$. En ésta última expresión se observa que se trata de una función polinomial de 1^er^ grado, por tanto, su dominio y su rango es el conjunto de los números reales, o sea: $D = (-\infty, \infty)$; $R = (-\infty, \infty)$.

2) $f(x)=2(x-1)^2+3$

Solución

Esta es una función polinomial y si la desarrollamos algebraicamente, nos damos más cuenta de esta afirmación: $y=2x^2-4x+5$, por lo que toda la función polinomial tiene por dominio y rango a todos los reales, a menos que se diga otra cosa. $D=(-\infty,\infty)$; $R=(-\infty,\infty)$

3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}$

Solución

Si una función se presenta en forma de fracción y además en el denominador se tiene a la v.i. "x" dentro de un radical, con índice par, se debe verificar que el subradical $2x-1>0$, resolviendo esta desigualdad se tiene que $2x>1$, $x>\dfrac{1}{2}$, esto nos indica que el dominio son todos los números reales mayores estrictamente que $\dfrac{1}{2}$, o sea $D=\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$. Para la determinación del rango de esta función, se tiene que de acuerdo con su dominio, la v.i. "x" no puede tomar valores negativos, por consiguiente la v.d. "y" nunca será negativa. Al despejar a "x" de la expresión original se obtiene: $x=\dfrac{y^2-2\pm\sqrt{y^2-8}}{4}$ y garantizando que el subradical sea no negativo, se tiene que $y^2-8\geq 0$; $y^2\geq 8$; $y\geq 2\sqrt{2}$ y el rango es $R=\left[2\sqrt{2},\infty\right)$.

4) $f(x)=2\ln\left(x^2+2\right)-1$

Solución

En esta función, el argumento del logaritmo $\left(x^2+2\right)$ nunca será ni cero ni negativo para cualquier valor que se asigne a la v.i. "x" por lo que el dominio es $D=(-\infty,\infty)$. En cuanto al rango de esta función se tiene que; observando la función original, se ve que el menor valor que tomará la v.d. "y" es cuando la v.i. "x" toma el valor de cero o sea: $y=2\ln\left(0^2+2\right)-1$; $y=2\ln(2)-1$; $y=\ln\left(2^2\right)-1$; $y=\ln(4)-1$ por lo tanto el rango es $R=[\ln(4)-1,\infty)\approx[0.39,\infty)$.

5) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

<u>Solución</u>

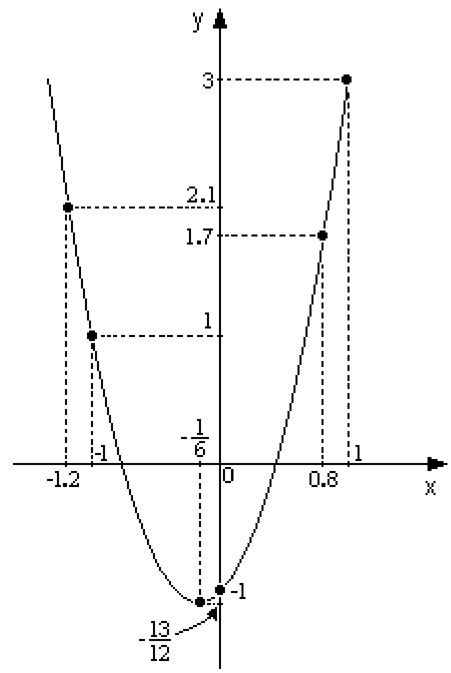
Como esta función es polinomial, su dominio y su rango son todos los números reales respectivamente, o sea: $D = (-\infty, \infty)$; $R = (-\infty, \infty)$.

1.5. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

1) $y = 3x^2 + x - 1$

<u>Solución</u>

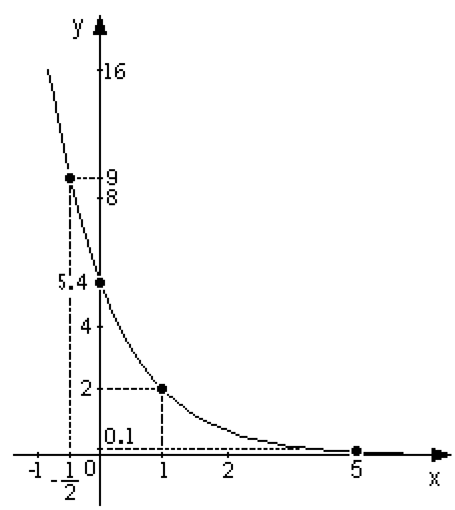
x	y
-1.2	2.1
-1	1
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{13}{12}$
0	-1
0.8	2
1	3



2) $y = 2e^{-x+1}$

<u>Solución</u>

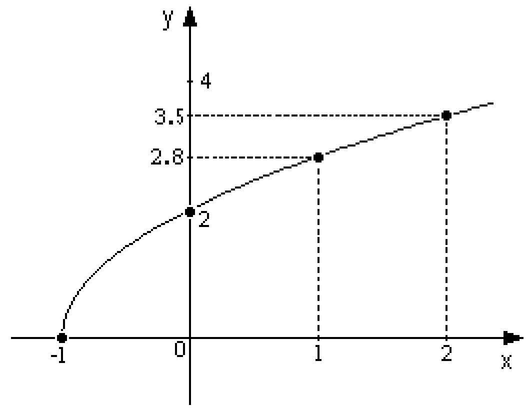
x	y
$-\frac{1}{2}$	9
0	5.4
1	2
0.1	5



3) $y = \sqrt{4x+4}$

Solución

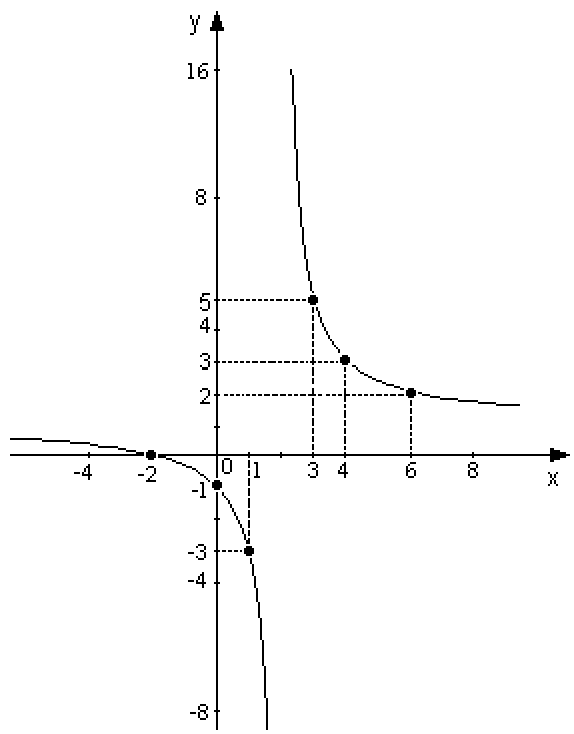
x	y
-1	0
0	2
1	2.8
2	3.5



4) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$

Solución

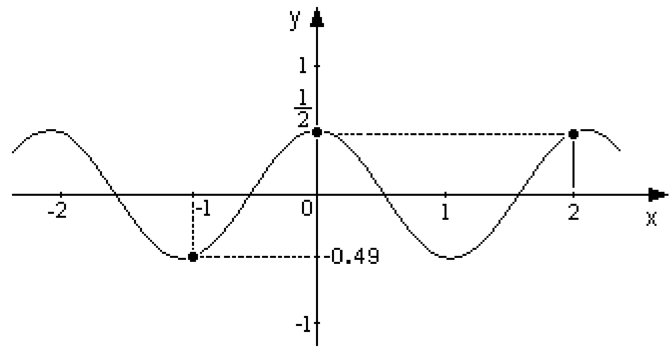
x	y
-2	0
0	-1
1	-3
3	5
4	3
6	2



5) $y = \frac{1}{2}\cos(3x)$

Solución

x	y
-1	-0.49
0	$\frac{1}{2}$
2	0.48



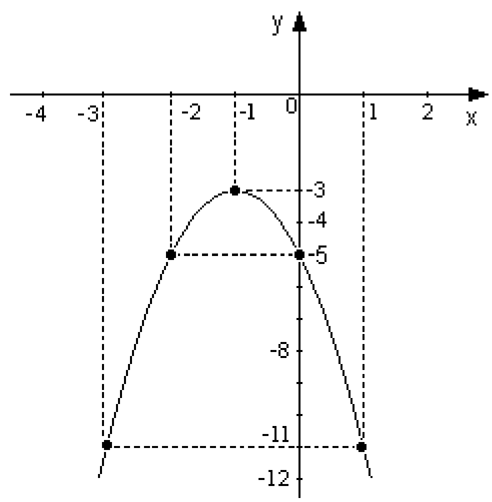
1.6. FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

1) $f(x) = -2(x+1)^2 - 3 \quad ; \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Solución

Ninguna de las anteriores

x	y
-3	-11
-2	-5
-1	-3
0	-5
1	-11

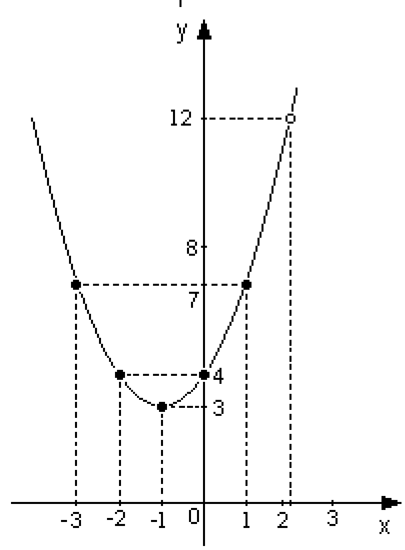


2) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad ; \quad f : \mathbb{R} - \{2\} \to [3, \infty)$

Solución

Ninguna de las anteriores

x	y
-3	7
-2	4
-1	3
0	4
1	7

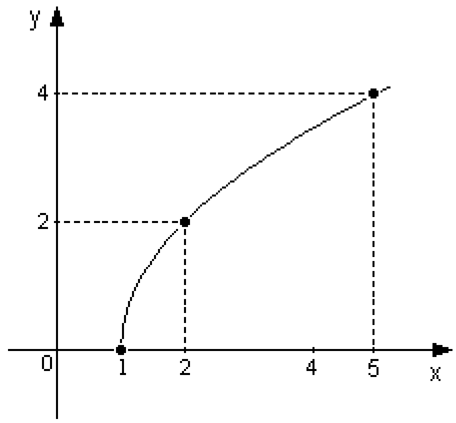


3) $f(x)=\sqrt{4x-4}$; $f:[1,\infty)\rightarrow[0,\infty)$

<u>Solución</u>

Es biyectiva

x	y
1	0
2	2
5	4

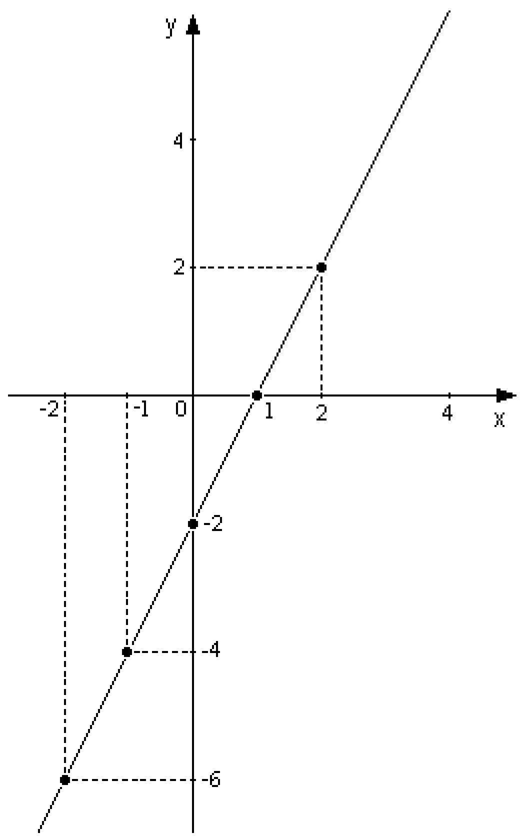


4) $f(x)=2(x-2)+2$; $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

<u>Solución</u>

Es biyectiva

x	y
-2	-6
-1	-4
0	-2
1	0
2	2

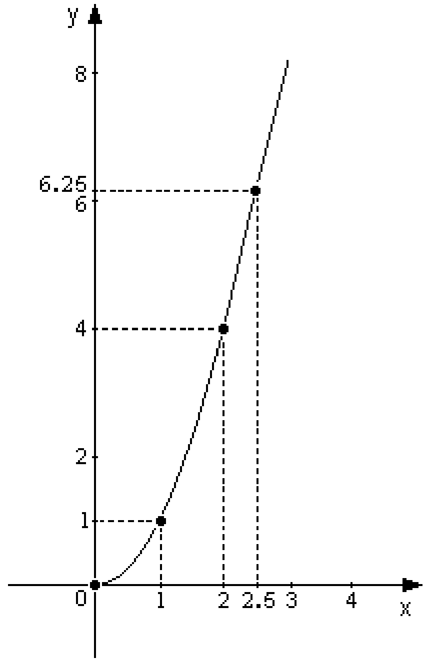


5) $f(x) = x^2 \quad ; \quad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Solución

Es inyectiva

x	y
0	0
1	1
2	4
2.5	6.25



1.7. FUNCIÓN INVERSA

1) $f(x) = 4x - 1$

Solución

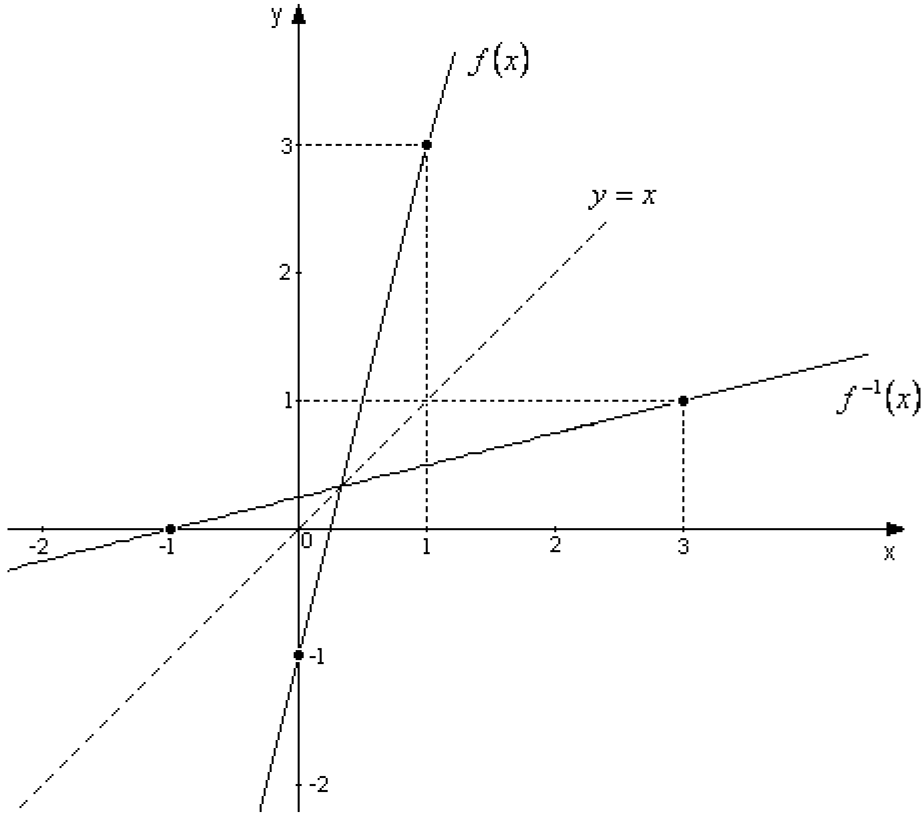
Intercambiando variables, tenemos: $x = 4y - 1$, de esta última despejando la $y = \dfrac{x+1}{4}$, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$. Tabulando estas dos funciones y graficándolas se tiene:

$f(x) = 4x - 1$

x	y
-3	-13
-2	-9
-1	-5
0	-1
1	3
2	7
3	11

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$

x	y
-13	-3
-9	-2
-5	-1
-1	0
3	1
7	2
11	3



2) $f(x) = x^3$

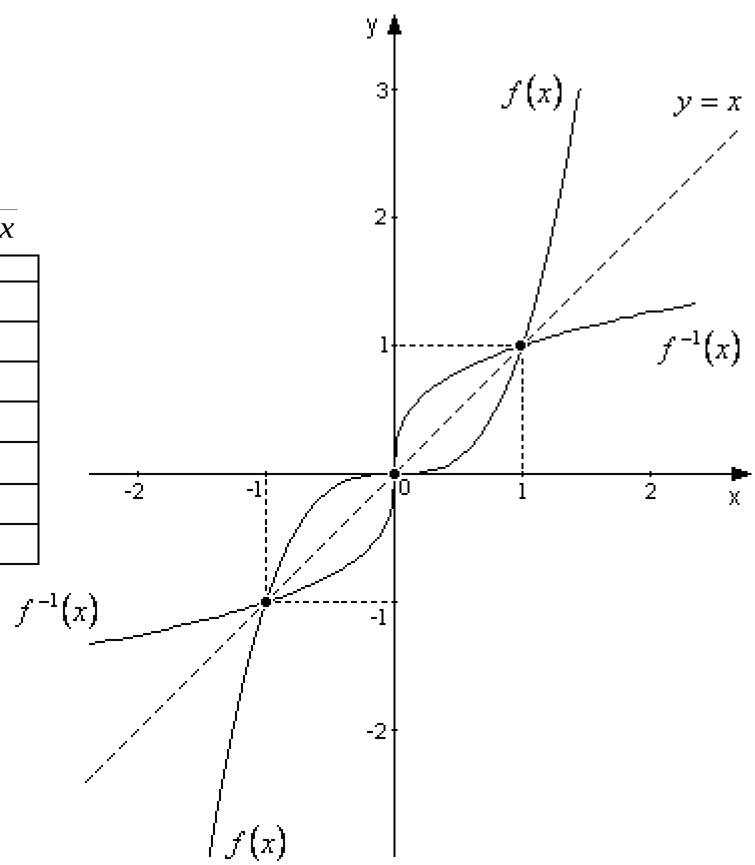
<u>Solución</u>

$f(x) = x^3$

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

x	y
-27	-3
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2
27	3

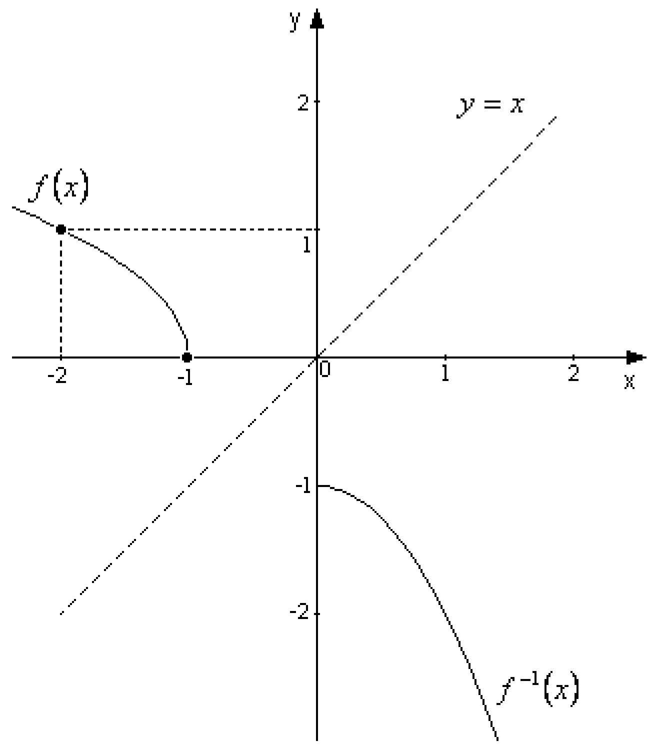


3) $f(x)=\sqrt{-1-x}$

Solución

x	y
-1	0
-2	1
-3	1.41
-4	1.73
-5	2
-6	2.23
-7	2.44

x	y
0	-1
1	-2
1.41	-3
1.73	-4
2	-5
2.23	-6
2.44	-7



4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

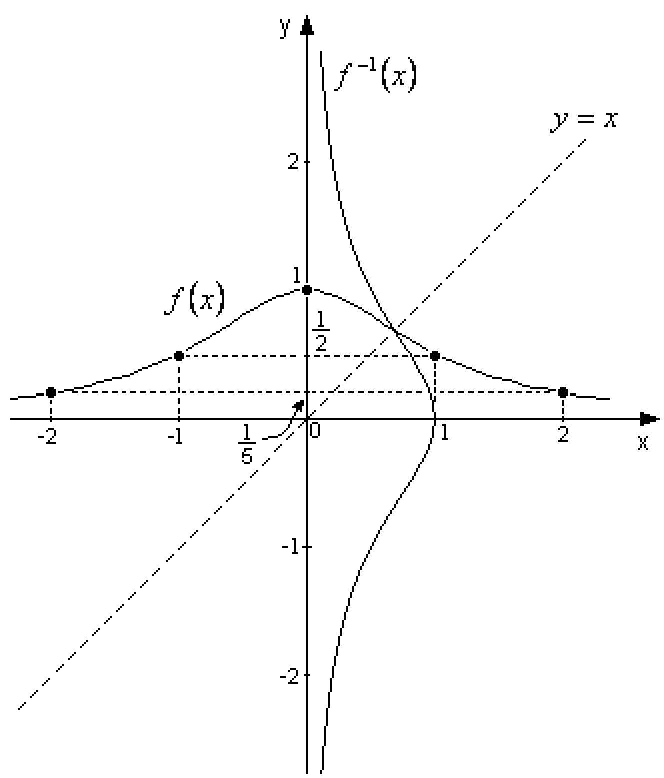
Solución

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

x	y
-3	$\frac{1}{10}$
-2	$\frac{1}{5}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{10}$

$f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$

x	y
$\frac{1}{10}$	-3
$\frac{1}{5}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{5}$	2
$\frac{1}{10}$	3



5) $f(x) = 2^x$

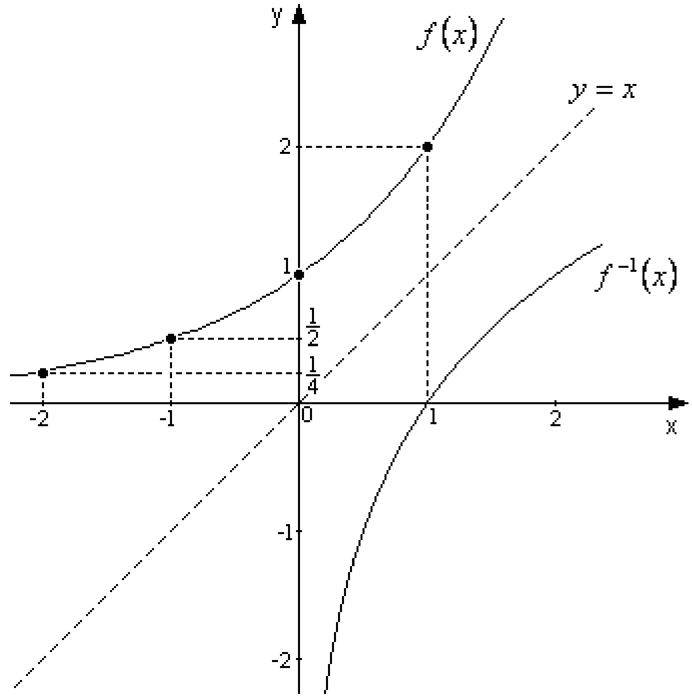
<u>Solución</u>

$f(x) = 2^x$

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$f^{-1}(x) = \log_2 x$

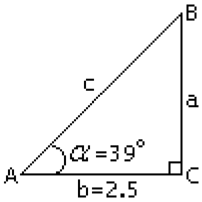
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO II

2.2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1) De acuerdo con la notación convenida, se tiene el siguiente bosquejo del triángulo, donde:



$$\tan 39^0 = \frac{a}{b} = \frac{a}{2.5}$$

despejando $a = b\tan 39^0 = 2.5\tan 39^0 \cong 2.02$

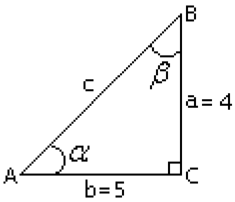
$$\cos 39^0 = \frac{b}{c} = \frac{2.5}{c}$$

despejando $c = \dfrac{2.5}{\cos 39^0} \cong 3.22$

y como $\alpha + \beta = 90^0; \quad \beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 39^0 = 51^0$

Por lo tanto $a \cong 2.02; \quad c \cong 3.22 \quad y \quad \beta = 51^0$

2) Por Pitágoras: $c = \sqrt{(4)^2 + (5)^2} \cong 6.40$

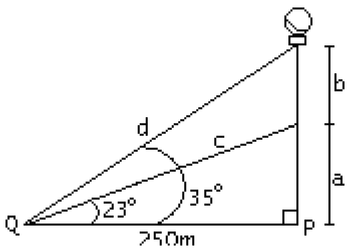


$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{5} = 0.8; \quad \alpha = \tan^{-1}(0.8) = 38.66^0$$

$$\alpha + \beta = 90^0; \quad \beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 38.66^0 = 51.34^0$$

Entonces $c \cong 6.40; \quad \alpha = 38.66^0 \quad y \quad \beta = 51.34^0$

3) De acuerdo con los datos, el bosquejo del problema es el que se muestra, donde la magnitud "b" es la respuesta.



Si $\tan 23^0 = \dfrac{a}{250}$

despejando $a = 250\tan 23^0 \cong 106.12\,[m]$

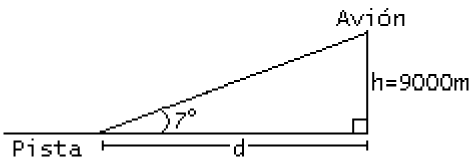
$$\tan 35^0 = \frac{a+b}{250}$$

despejando $a + b = 250\tan 35^0 \cong 175.05\,[m]$

donde $b = 175.05 - a = 175.05 - 106.12$

$b = 68.93\,[m]$

4) El bosquejo aproximado sería como se muestra en la siguiente figura, donde:

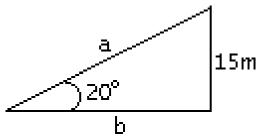


Si $\tan 7^0 = \dfrac{9000}{d}$

despejando $d = \dfrac{9000}{\tan 7^0} \cong 73299\,[m]$

aproximadamente a $73.3\,[Km]$

5) Con el triángulo que tiene un ángulo de 20^0, tenemos:

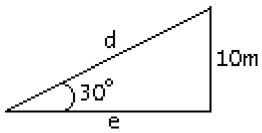


$$sen20^0 = \frac{15}{a}$$

despejando $a = \dfrac{15}{sen20^0} \cong 43.86\,[m]$

por el Teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{(43.86)^2 - (15)^2} \cong 41.22\,[m]$

con el triángulo que tiene un ángulo de 30^0, se tiene:



$$sen30^0 = \frac{10}{d}$$

despejando $d = \dfrac{10}{sen30^0} = 20\,[m]$

por el Teorema de Pitágoras $e = \sqrt{(20)^2 - (10)^2} \cong 17.32\,[m]$

La magnitud $c = 110 - (b+e) = 110 - 58.54 = 51.46\,[m]$
Luego entonces, la longitud total del tobogán es $a + c + d = 43.86 + 51.46 + 20 = 115.32\,[m]$

2.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN CUALQUIER CUADRANTE

1)

Ángulo	tan	cot	sec	csc	Cuadrante
0	0	indefinido	1	indefinido	I
$\frac{\pi}{4} = 45^0$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	I
$\frac{\pi}{2} = 90^0$	indefinido	0	indefinido	1	I
$\frac{2}{3}\pi = 120^0$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	II
$\pi = 180^0$	0	indefinido	-1	indefinido	II
$\frac{5}{4}\pi = 225^0$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	III
$\frac{3}{2}\pi = 270^0$	indefinido	0	indefinido	-1	III
$\frac{5}{3}\pi = 300^0$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	IV
$2\pi = 360^0$	0	indefinido	1	indefinido	IV

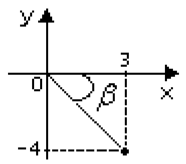
2)

Ángulo	cos	cot	csc	Cuadrante
75^0	0.2588	0.2679	1.0353	I
150^0	-0.8660	-1.7321	2.0000	II
230^0	-0.6428	0.8391	-1.3054	III
283^0	0.2250	-0.2309	-1.0263	IV

3)

Ángulo	sen	tan	sec	Cuadrante
$1.2 \cong 68.75^0$	0.9320	2.5722	2.7597	I
$2.4536 \cong 140.58^0$	0.6350	-0.8220	-1.2945	II
$-0.2731 \cong -15.65^0$	-0.2697	-0.2801	1.0385	IV
$-4.27 \cong -244.65^0$	0.9037	-2.1110	-2.3359	II
$0.5731 \cong 32.84^0$	0.5422	0.6454	1.1902	III

4) En el bosquejo de la información dada del problema puede ser el siguiente:



La magnitud del segmento $\overline{PQ}$ la obtenemos del Teorema de Pitágoras:

$\overline{OP} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

Consideramos que el ángulo generado β es negativo y su valor es: $sen\beta = \frac{-4}{5} = -0.8$

donde $\beta = sen^{-1}(-0.8) \cong -53.14^0$

Por lo tanto:

$$sen(-53.14^0) = -0.8 \quad ; \quad \csc(-53.14^0) = \frac{5}{-4} = -1.25$$

$$\cos(-53.14^0) = \frac{3}{5} = 0.6 \quad ; \quad \sec(-53.14^0) = \frac{5}{3} \cong 1.7$$

$$\tan(-53.14^0) = \frac{-4}{3} = -1.3 \quad : \quad \cot(-53.14^0) = \frac{3}{-4} = -0.75$$

5) Como $\frac{1}{3}\pi = 60^0$, entonces $\frac{4}{3}\pi = 4(60^0) = 240^0$ (tercer cuadrante)

$$\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \cos 240^0 = -0.5$$

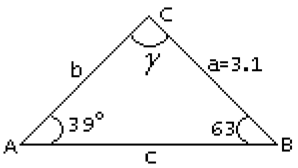
Como $\frac{1}{6}\pi = 30^0$, entonces $\frac{7}{6}\pi = 7(30^0) = 210^0$ (tercer cuadrante)

$sen\left(\frac{7}{6}\pi\right) = sen210^0 = -0.5$

$\tan 315^0 = -1$ (cuarto cuadrante)
$\sec\left(-150^0\right) \cong -1.1547$ (tercer cuadrante)
$\csc\left(-120^0\right) \cong -1.1547$ (tercer cuadrante)
$\cot\left(225^0\right) = 1$ (tercer cuadrante)

2.4. LEY DE LOS SENOS Y LEY DE LOS COSENOS

1)



Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$; $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 102^0$

$\underline{\gamma = 78^0}$

Por la ley de los senos:

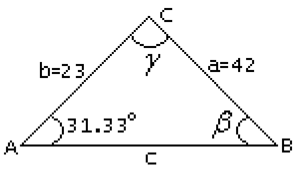
$\frac{b}{sen63^0} = \frac{a}{sen39^0}$; $b = \frac{(3.1)(sen63^0)}{sen39^0} \cong 4.4$

Por ley de los cosenos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (3.1)^2 + (4.4)^2 - 2(3.1)(4.4)\cos 78^0 \cong 23.3$

$\underline{c = \sqrt{23.3} \cong 4.8}$

2)



Por la ley de los senos $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$; $sen\beta = \frac{bsen\alpha}{a}$

$sen\beta = \frac{23sen31.33^0}{42}$

$sen\beta = 0.2847$

$\beta = sen^{-1}(0.2847)$

$\underline{\beta = 16.54^0}$

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$
$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 47.87^0$
$\underline{\gamma = 132.13^0}$

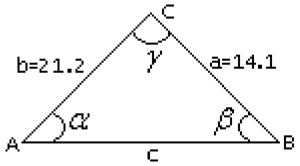
Por la ley de los cosenos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (42)^2 + (23)^2 - 2(42)(23)\cos 132.13^0$
$c^2 \cong 3589$; $c = \sqrt{3589}$
$\underline{c \cong 59.91}$

3) Por la ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (14.1)^2 + (21.2)^2 - 2(14.1)(21.2)\cos 58.57^0$$

$$c^2 = 336.5 \; ; \; c = \sqrt{336.5} \cong 18.34$$



$$\underline{c = 18.34}$$

Por la ley de los senos: $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{c}{sen\gamma}$; $sen\alpha = \dfrac{asen\gamma}{c}$

$$sen\alpha = \frac{14.1sen58.75^0}{18.34} \cong 0.6573$$

$$\alpha = sen^{-1}0.6573 = 41.09^0 \; ; \; \underline{\alpha = 41.09^0}$$

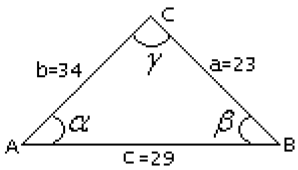
Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$; $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma) = 180^0 - 99.84^0$

$$\underline{\beta = 80.16^0}$$

4) De la ley de los cosenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

despejando $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(34)^2 + (29)^2 - (23)^2}{2(34)(29)}$

$$\cos\alpha \cong 0.7444 \; ; \; \alpha = \cos^{-1} 0.7444 \; ; \; \underline{\alpha = 41.89^0}$$



Por la ley de los senos: $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta}$; $sen\beta = \dfrac{bsen\alpha}{a}$

$$sen\beta = \frac{34sen41.89^0}{23} \cong 0.9870 \; ; \; \beta = sen^{-1}0.9870 \; ; \; \underline{\beta = 80.75^0}$$

Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$; $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 122.64^0$

$$\underline{\gamma = 57.36^0}$$

5) Por la ley de los cosenos:

$$(QR)^2 = q^2 + r^2 - 2qr\cos 60^0 = (493)^2 + (315)^2 - 2(493)(315)(0.5)$$

$$(QR)^2 = 243049 + 99225 - 155295 = 186979$$

$QR = \sqrt{186979} = \underline{432.41}$ metros

6) Por la suma de ángulos internos: $V = 180^0 - \left(63^0 + 38^0\right) = 79^0$

Por la ley de los senos: $\dfrac{VU}{sen63^0} = \dfrac{TU}{sen79^0}$

$VU = \dfrac{TUsen63^0}{sen79^0} = \dfrac{0.8(0.8910)}{0.9616}$; $\underline{VU = 0.726\,[Km]}$

Por la ley de los cosenos: $(VT)^2 = (TU)^2 + (VU)^2 - 2(TU)(VU)\cos 38^0$

$(VT)^2 = 0.2517 \, ; VT = \sqrt{0.2517} = \underline{0.502\,[Km]}$ es más conveniente el banco T

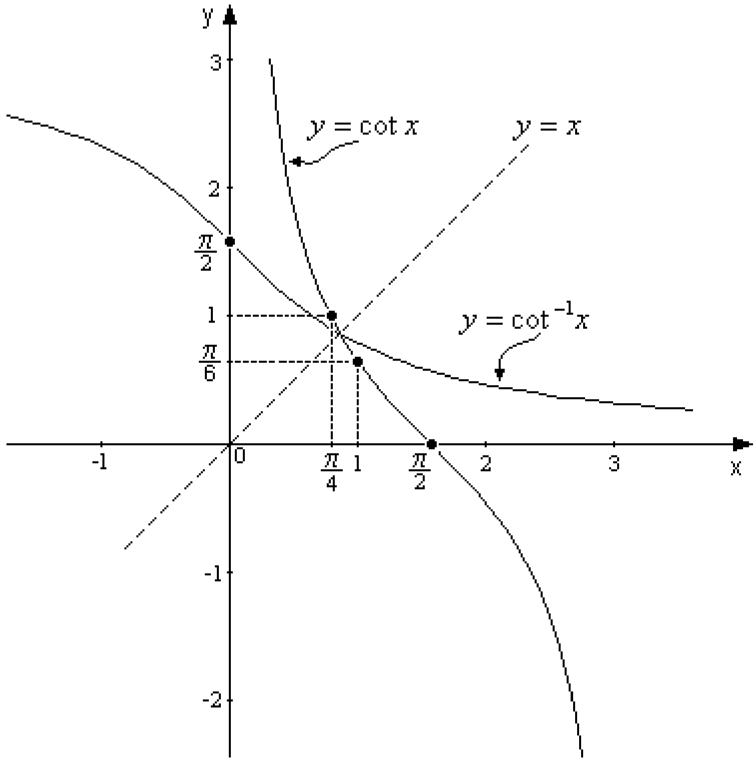
2.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1) La función $y = \cot x$ tiene dominio $D = \mathbb{R} - \{x | x \in n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ y rango $R = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, para que su inversa $y = \cot^{-1}(x)$ también sea función hay que restringir el dominio a $D = (0, \pi)$ conservando su rango $R = (-\infty, \infty)$. Por lo tanto el dominio de la inversa es $D = (-\infty, \infty)$ y su rango $R = (0, \pi)$ (se intercambian los papeles).

Con tu calculadora científica puedes calcular valores (puntos de la gráfica) de la función si $y = \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

x	$\cot x = \frac{1}{\tan x}$
$\frac{\pi}{6} = 30^0$	1.73
$\frac{\pi}{4} = 45^0$	1.00
$\frac{\pi}{3} = 60^0$	0.58
$\frac{\pi}{2} = 90^0$	0.00
$\frac{2}{3}\pi = 120^0$	-0.58
$\frac{3}{4}\pi = 135^0$	-1.00
$\frac{5}{6}\pi = 150^0$	-1.73

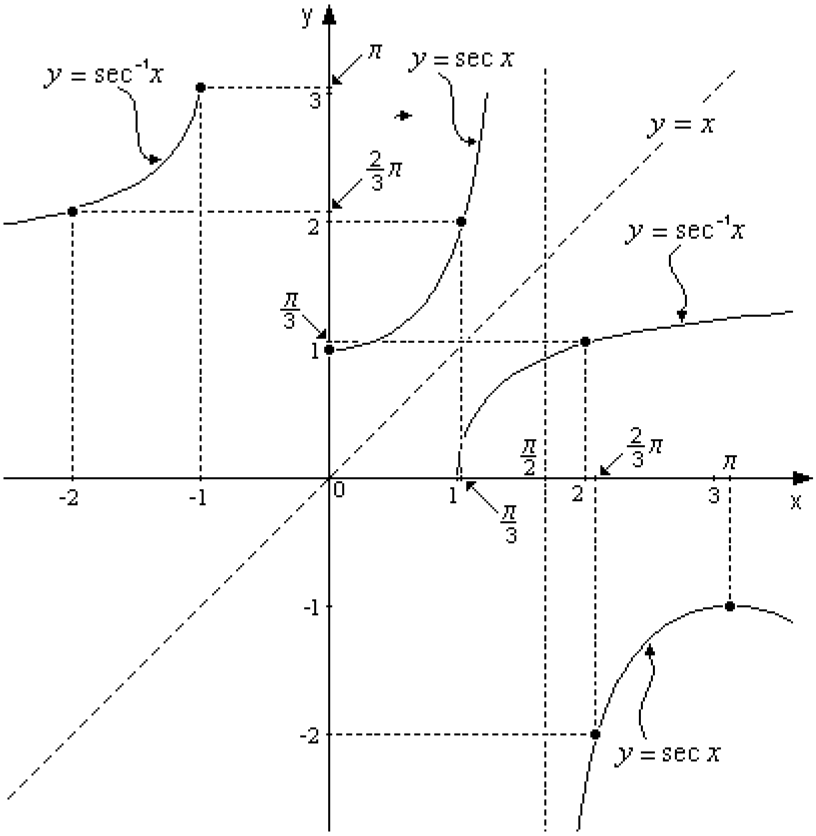
x	$\cot^{-1} x$
1.73	$\frac{\pi}{6} = 0.52$
1.00	$\frac{\pi}{4} = 0.79$
0.58	$\frac{\pi}{3} = 1.05$
0.00	$\frac{\pi}{2} = 1.57$
-0.58	$\frac{2}{3}\pi = 2.09$
-1.00	$\frac{3}{4}\pi = 2.36$
-1.73	$\frac{5}{6}\pi = 2.62$



2) $y = \sec x$, tiene dominio $D = \mathbb{R} - \left\{ x \middle| x = \pm(2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$ (todos los reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$) y su rango son todos los reales mayores que uno y menores que menos uno, o sea $R = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Para que su inversa $y = \sec^{-1}(x)$ sea función se debe restringir su dominio de 0 a π quitando $\frac{\pi}{2}$, o sea $D = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ y conservando su rango $R = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Por lo tanto el dominio de la inversa es $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ y su rango $R = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (intercambiando los papeles.

x	sec x
0.00	1.00
$\frac{\pi}{6}= 30^0$	1.15
$\frac{\pi}{4}=45^0$	1.41
$\frac{\pi}{3}=60^0$	2.00
$\frac{2}{3}\pi=120^0$	-2.00
$\pi=180^0$	-1.00

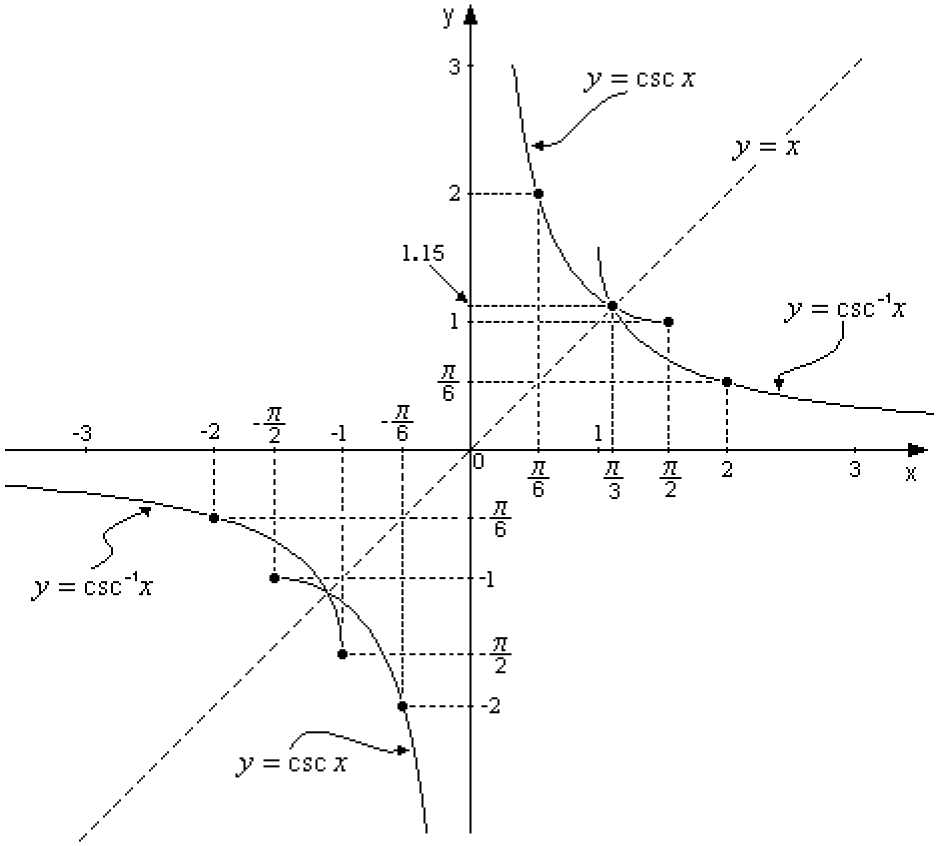
x	$\sec^{-1}$x
1.00	0.00
1.15	$\frac{\pi}{6}=0.52$
1.41	$\frac{\pi}{4}=0.79$
2.00	$\frac{\pi}{3}=1.05$
-2.00	$\frac{2}{3}\pi=2.09$
-1.00	$\pi=3.14$



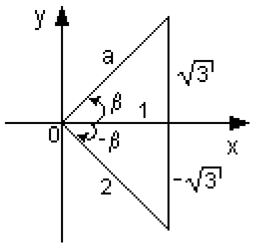
3) $y = \csc x$ tiene dominio $D = \mathbb{R} - \{x | x \in n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ o sea todos los números reales diferentes a los múltiplos enteros de π y su rango $R = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. Para que su inversa $y = \csc^{-1}(x)$ sea función hay que restringir el dominio a $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ conservando su rango $R = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. Por lo tanto, el dominio de la inversa es $D = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ y su rango $R = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (se intercambian los papeles).

x	$\csc x = \frac{1}{sen x}$
$-\frac{\pi}{2}=-90^0$	-1.00
$-\frac{\pi}{3}=-60^0$	-1.15
$-\frac{\pi}{4}=-45^0$	-1.41
$-\frac{\pi}{6}=-30^0$	-2.00
$\frac{\pi}{6}=30^0$	2.00
$\frac{\pi}{4}=45^0$	1.41
$\frac{\pi}{3}=60^0$	1.15
$\frac{\pi}{2}=90^0$	1.00

x	$\csc^{-1}$x
-1.00	$-\frac{\pi}{2}=-1.57$
-1.15	$-\frac{\pi}{3}=-1.05$
-1.41	$-\frac{\pi}{4}=-0.79$
-2.00	$-\frac{\pi}{6}=-0.52$
2.00	$\frac{\pi}{6}=0.52$
1.41	$\frac{\pi}{4}=0.79$
1.15	$\frac{\pi}{3}=1.05$
1.00	$\frac{\pi}{2}=1.57$



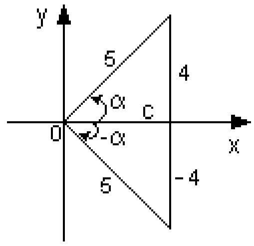
4) Sea $\beta = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$, se busca un ángulo β comprendido en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente sea $\frac{-\sqrt{3}}{1}$, esto es: $\tan\beta = -\frac{\sqrt{3}}{1}$, lo cual resulta que β está entre 0 y $-\frac{\pi}{2}$ (ver figura), por lo que el único ángulo dentro de $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ es $\beta = -60^0 = -\frac{\pi}{3}$.



Por el Teorema de Pitágoras

$$a = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

5) Si $\alpha = sen^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$, entonces $sen\alpha = -\frac{4}{5}$, donde el ángulo α debe estar dentro del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y como la razón $-\frac{4}{5}$ es negativa, entonces α debe estar entre $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ (ver figura), por lo tanto $\tan\left[sen^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right] = \tan(-\alpha) = -\frac{4}{3}$.



Por el Teorema de Pitágoras

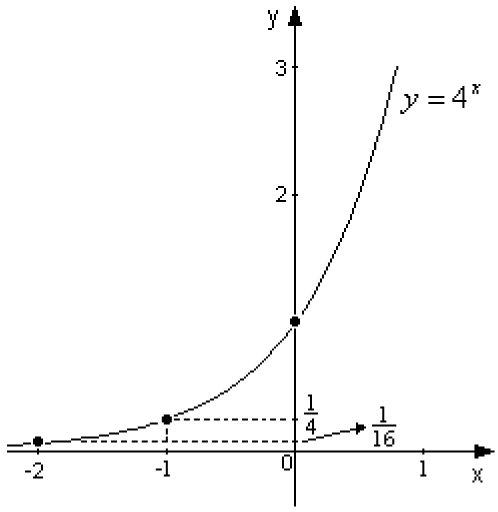
$$c = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO III

3.1. FUNCIÓN EXPONENCIAL

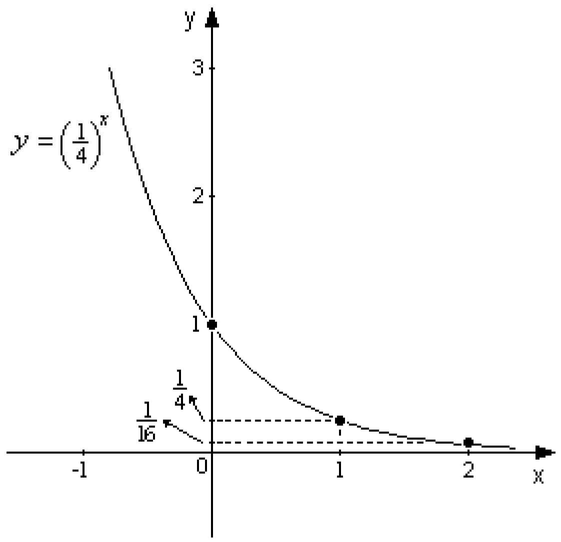
1) $y = 4^x$

x	4^x
2	16
1	4
0	1
-1	$\frac{1}{4}$
-2	$\frac{1}{16}$



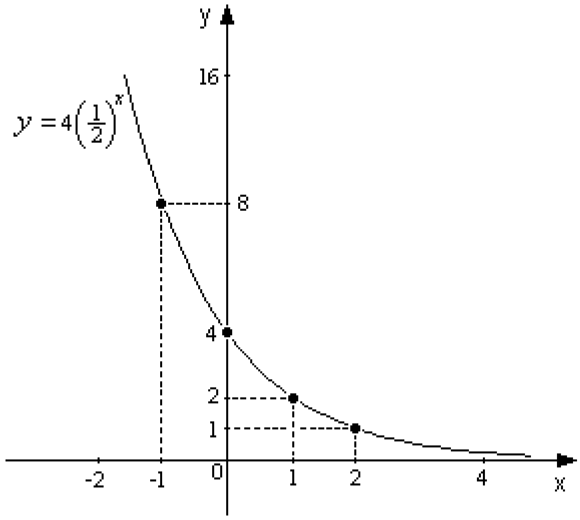
2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	$\left(\frac{1}{4}\right)^x$
2	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{4}$
0	1
-1	4
-2	16



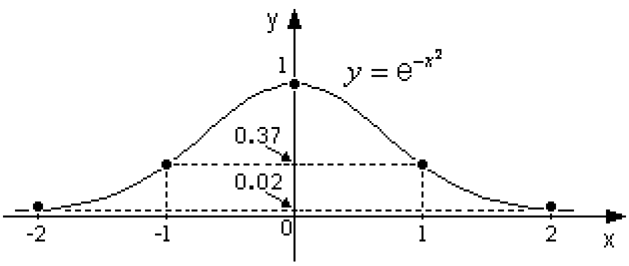
3) $y = 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$

x	$4\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
2	1
1	2
0	4
-1	8
-2	16



4) $y = e^{-x^2}$

x	e^{-x^2}
2	0.02
1	0.37
0	1
-1	0.37
-2	0.02



5) $y = 79 + 6.4t - e^{3.25-t}$

Sustituyendo $y = 79 + 6.4t - e^{3.25-2} = 79 + 12.8 - e^{1.25} = 79 + 12.8 - 3.5$

$$y = 88.3[cm]$$

La estatura esperada del niño a los 2 años es de $88.3[cm]$

3.2. FUNCIÓN LOGARITMO

1) $y = \log x$

Cuando se representa el logaritmo de base 10, es costumbre escribir $y = \log x$ sin poner la base 10.

$y = \log x \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^y$

x	y
0.001	-3
0.01	-2
0.10	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3

Si

$$y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$$

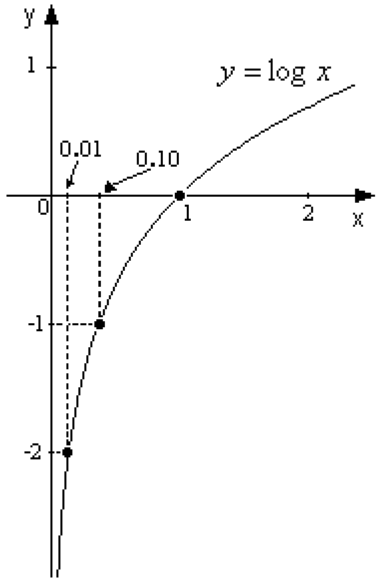
$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10^0 = 1$$

$$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 10^1 = 10$$

$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 10^2 = 100$$

$$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 10^3 = 1000$$



2) $y = \ln(2x)$

$y = \ln(2x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = e^y \; ; \; x = \frac{1}{2} e^y$

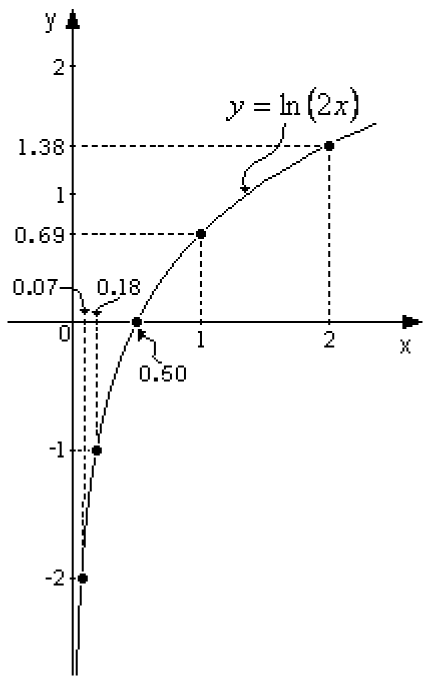
x	y
0.02	-3
0.07	-2
0.18	-1
0.50	0
1.00	0.69
2.00	1.38
10.04	3

Si

$$y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} e^{-3} = \frac{1}{2e^3} \cong 0.02$$

$$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} e^{-2} = \frac{1}{2e^2} \cong 0.07$$

$$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2e^1} \cong 0.18$$



$y=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}e^{0}=\frac{1}{2}(1)=0.50$

$y=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}e^{1}\cong 1.36$

$y=2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}e^{2}\cong 3.69$

$y=3 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}e^{3}\cong 10.04$

3) $y=\log_2 x^2$

Si $\quad y=\log_2 x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=2^y \; ; x=\pm\sqrt{2^y}$

$y=-3 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2^{-3}}=\pm\sqrt{\frac{1}{2^3}}=\pm\sqrt{\frac{1}{8}}\cong\pm 0.35$

$y=-2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2^{-2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{2^2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\cong\pm 0.50$

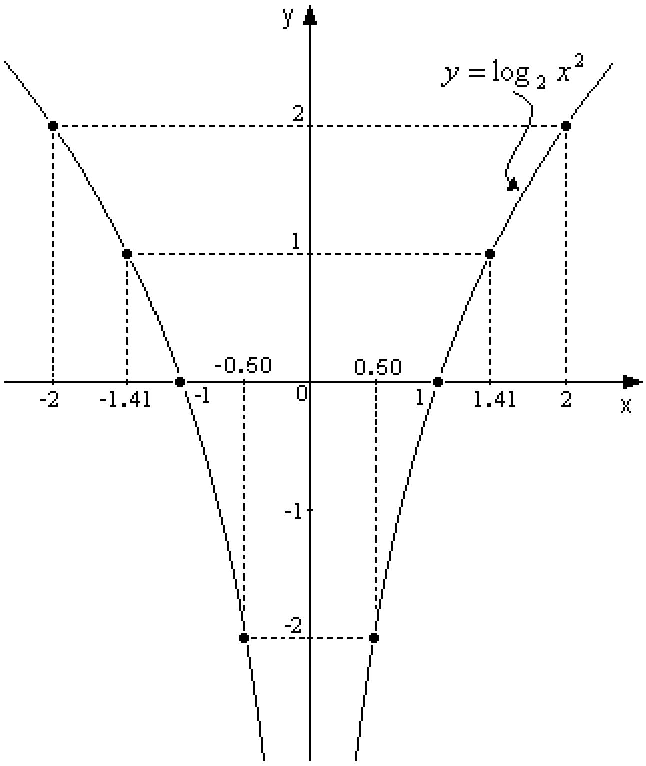
$y=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2^{0}}=\pm\sqrt{1}=\pm 1.00$

$y=1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2^{1}}=\pm 1.41$

$y=2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2^{2}}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

$y=3 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2^{3}}=\pm\sqrt{8}=\pm 2.83$

x	y
±0.35	-3
±0.50	-2
±0.71	-1
±1.00	0
±1.41	1
±2.00	2
±2.83	3



4) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^y \; ; x = 2\left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{2}{2^y} = (2)\left(2^{-y}\right) = 2^{1-y}$$

x	y
16	-3
8	-2
4	-1
2	0
1	1
0.50	2
0.25	3

Si $y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 2^{1-(-3)} = 2^4 = 16$

$y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 2^{1-(-2)} = 2^3 = 8$

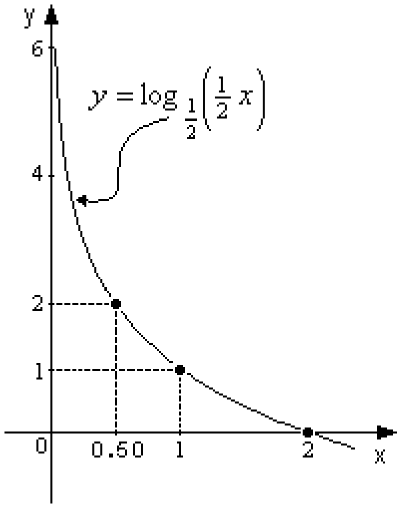
$y = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 2^{1-(-1)} = 2^2 = 4$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2^{1-0} = 2^1 = 2$

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2^{1-1} = 2^0 = 1$

$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2^{1-(2)} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$

$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2^{1-(3)} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$



5) $y = \log_2(x+1)$

$y = \log_2(x+1) \iff (x+1) = 2^y$; $x = 2^y - 1$

x	y
-0.88	-3
-0.75	-2
-0.50	-1
0	0
1	1
3	2
7	3

Si $y = -3 \Rightarrow x = 2^{-3} - 1 = \frac{1}{2^3} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{7}{8} = -0.88$

$y = -2 \Rightarrow x = 2^{-2} - 1 = \frac{1}{2^2} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{3}{4} = -0.75$

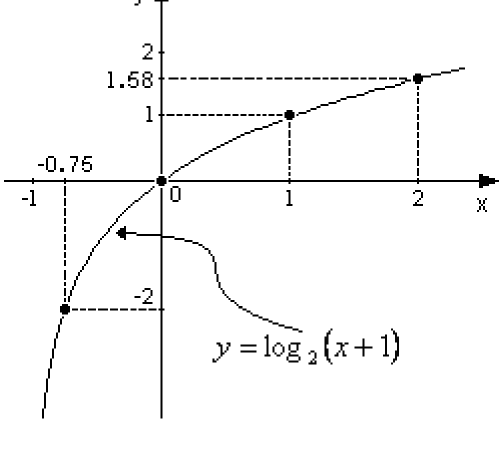
$y = -1 \Rightarrow x = 2^{-1} - 1 = \frac{1}{2^1} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} = -0.50$

$y = 0 \Rightarrow x = 2^0 - 1 = 0$

$y = 1 \Rightarrow x = 2^1 - 1 = 1$

$y = 2 \Rightarrow x = 2^2 - 1 = 3$

$y = 3 \Rightarrow x = 2^3 - 1 = 7$



6)

$$M = C\left(1+\frac{i}{t}\right)^{tn}$$

Datos

C=$100 000
M=$300 000
t=1 año
i=20% anual

n=?

Cuando la variable por despejar es exponente, esto se logra aplicando logaritmos en ambos miembros de la igualdad.

$$\log M = \log C + tn \log\left(1+\frac{i}{t}\right)$$

$$n = \frac{\log M - \log C}{t \log\left(1+\frac{i}{t}\right)}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$n = \frac{\log 300\,000 - \log 100\,000}{1 \log\left(1+\frac{0.20}{1}\right)} = 6.0256$$

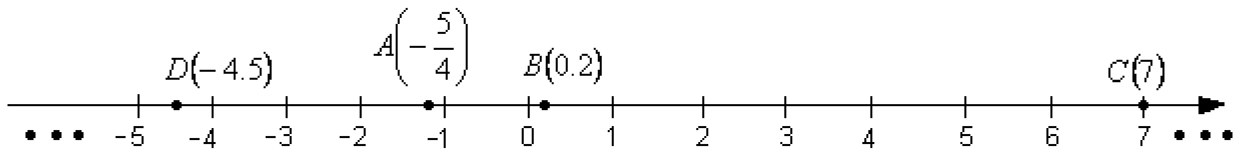
por lo que convirtiendo los 0.0256 de años a días se tiene que:

$$\underline{n = 6\,años\;9\,días}$$

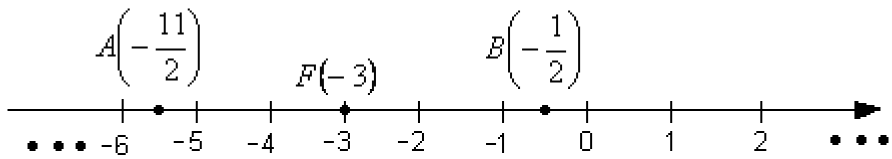
SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO IV

4.1. LOCALIZACIÓN DE PUNTOS EN LA RECTA NUMÉRICA

1)



2)



3)

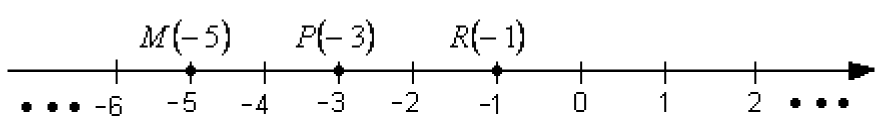
a) Si $x<0$, A está a la derecha de B.
Si $x=0$, A y B coinciden.
Si $x>0$, B está a la derecha de A.

b) B siempre estará a la derecha de A para cualquier valor de "c".

c) Si $x<0$, B siempre estará a la derecha de A.
Si $x=0,1$; A y B coinciden.
Si x toma valores entre cero y uno $(0<x<1)$, A siempre estará a la derecha de B.
Si x toma valores mayores que uno $(x>1)$, B siempre estará a la derecha de A.

d) Si x y a son negativos y diferentes $(x,a<0,\ x\neq a)$, B siempre estará a la derecha de A.
Si $x=a=0$, A y B coinciden.
Si x y a son positivos y diferentes $(x,a>0,\ x\neq a)$, A siempre estará a la derecha de B.
Si x es negativo y a positivo $(x<0, a>0)$, A siempre estará a la derecha de B.
Si x es positivo y a negativo $(x>0, a<0)$, B siempre estará a la derecha de A.

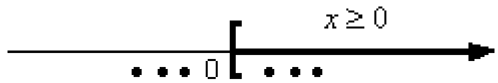
4)



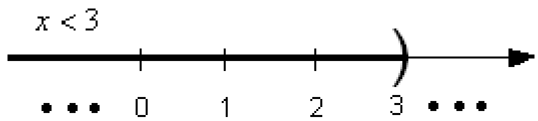
$$\frac{-5-1}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

5)

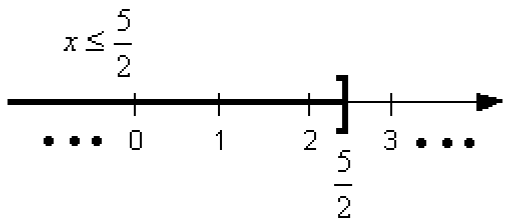
a)



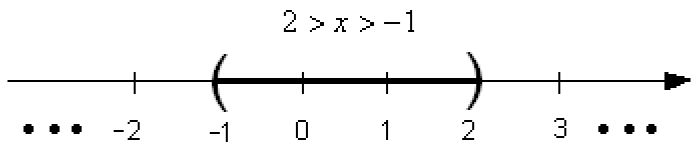
b)



c)

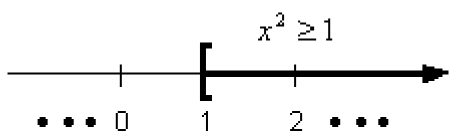


d)



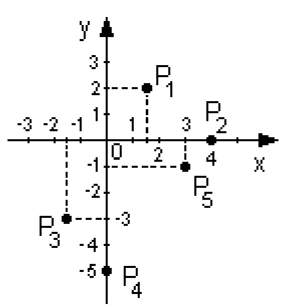
Nota: Se acostumbra poner a la izquierda siempre el menor número, o sea: $-1 < x < 2$

e)



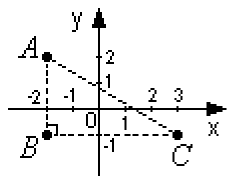
4.2. COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES EN EL PLANO

1)

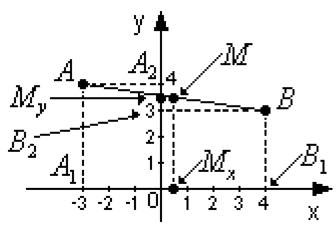


2) a) En el III o en el IV
b) $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$
c) Tercer cuadrante

3) Por ejemplo $A(-2,2)$, $B(-2,-1)$ y $C(3,-1)$



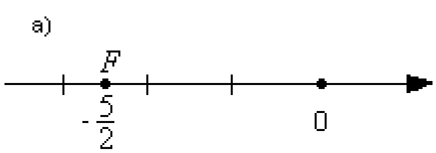
4)

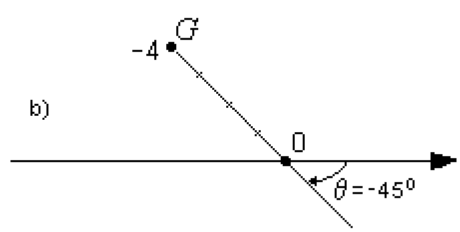


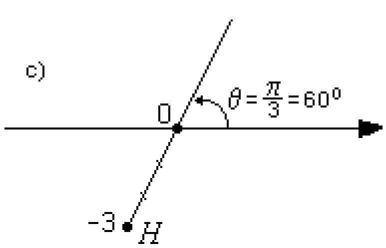
Los puntos medios de las proyecciones de los puntos A y B sobre los ejes coordenados son $M_x\left(\frac{1}{2}\right)$ y $M_y\left(\frac{7}{2}\right)$ por lo tanto $M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

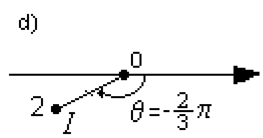
5) a) $I(+,+)$, $III(-,-)$
b) Cero o sea $(0, y)$ con $y \in \mathbb{R}$

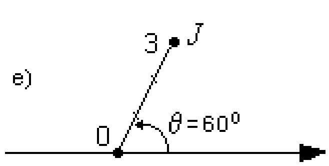
6)





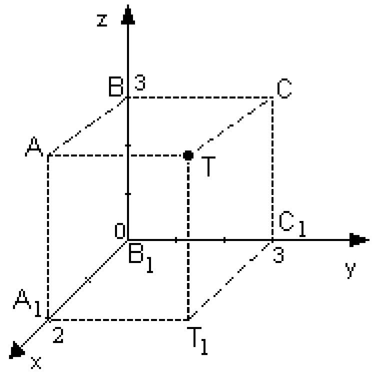






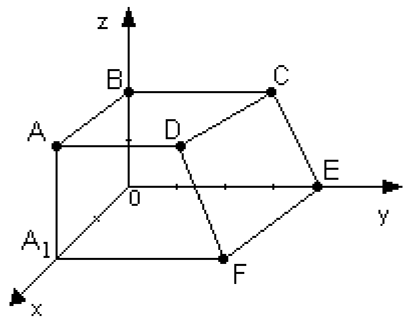
4.3. COORDENADAS CARTESIANAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

1)

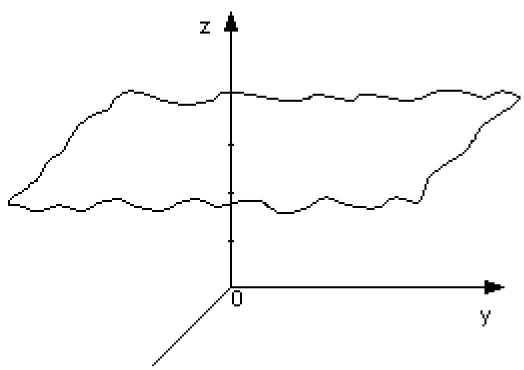


2) $A(2,0,3)$, $B(0,0,3)$, $C(0,3,3)$, $T(2,3,3)$, $A_1(2,0,0)$, $B_1(0,0,0)$, $T_1(2,3,0)$, $C_1(0,3,0)$

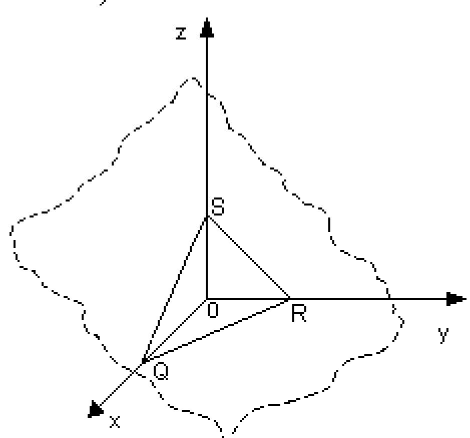
3)



4)



5)



4.4. EN LA RECTA: SEGMENTO DIRIGIDO. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE AL SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA.

1) $\overline{AB} = x_B - x_A = -\frac{5}{2} - 4 = -\frac{5}{2} - \frac{8}{2} = -\frac{13}{2}$

$\overline{BA} = x_A - x_B = 4 - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{8}{2} + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$

2) $\overline{AB} = x_B - x_A = 8 - 2.5 = 5.5$

$\overline{BA} = x_A - x_B = 2.5 - 8 = -5.5$

3) $\overline{AB} = x_B - x_A = -1 - \left(-\frac{16}{3}\right) = -1 + \frac{16}{3} = -\frac{3}{3} + \frac{16}{3} = \frac{13}{3}$

$\overline{BA} = x_A - x_B = -\frac{16}{3} - (-1) = -\frac{16}{3} + 1 = -\frac{16}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{13}{3}$

4) $\overline{AB} = x_B - x_A = 5 - 0 = 5$

$\overline{BA} = x_A - x_B = 0 - 5 = -5$

5) $\overline{AB} = x_B - x_A = -2 - 5 = -7$

$\overline{BA} = x_A - x_B = 5 - (-2) = 5 + 2 = 7$

6) $d(TN) = |x_N - x_T| = |-2 - 7| = |-9| = 9$

7) $d(TN) = |x_N - x_T| = \left|3 - \left(-\frac{3}{4}\right)\right| = \left|3 + \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{12}{4} + \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{15}{4}\right| = \frac{15}{4}$

8) $d(TN) = |x_N - x_T| = |0 - (-5)| = |5| = 5$

9) $d(TN) = |x_N - x_T| = |8 - 3.5| = |4.5| = 4.5$

10) $d(TN) = |x_N - x_T| = |4 - (-2)| = |4 + 2| = |6| = 6$

11) $\frac{rx_B + x_A}{1 + r} = \frac{(1)(-2) + 3}{1 + 1} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}$

12) $\frac{rx_B + x_A}{1 + r} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)(7) + 2}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{6}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}$

13) $\dfrac{rx_B + x_A}{1+r} = \dfrac{(-2)(2)+(-5)}{1+(-2)} = \dfrac{-4-5}{1-2} = \dfrac{-9}{-1} = 9$

14) $r = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \dfrac{4-\left(-\frac{3}{2}\right)}{2.5-4} = \dfrac{\frac{8}{2}+\frac{3}{2}}{-1.5} = \dfrac{\frac{11}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{11}{3}$

15) $r = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \dfrac{-5-(-2)}{-4-(-5)} = \dfrac{-5+2}{-4+5} = \dfrac{-3}{1} = -3$

4.5. EN EL PLANO: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. COORDENADAS DE UN PUNTO QUE DIVIDE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA.

1) $d(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{[0-(-3)]^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5.83$

2) $d(AC) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{[1-(-4)]^2 + [4-(-3)]^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74} \approx 8.60$

$d(BD) = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{[4-(-2)]^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61} \approx 7.81$

3) $d(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [2-(-1)]^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$d(BC) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$d(AC) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-5)^2 + [-1-(-2)]^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Sabemos que si un triángulo tiene dos lados de igual magnitud y el otro lado diferente magnitud, entonces se trata de un triángulo isósceles como en este caso.

4) $d(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4.47$

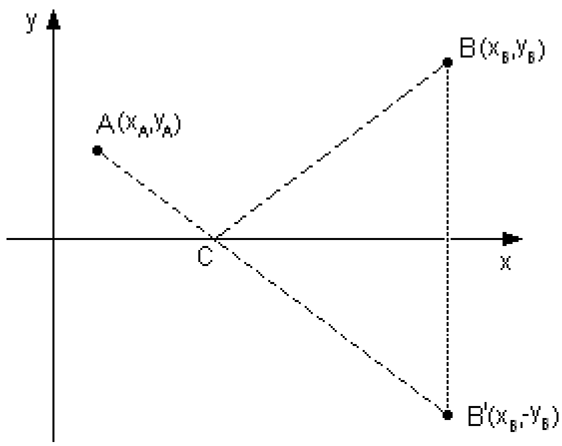
$d(DC) = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(11-9)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4.47$

$d(BC) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(11-3)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65} \approx 8.06$

$d(AD) = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(9-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65} \approx 8.06$

Sabemos que un cuadrilátero es un paralelogramo si sus lados paralelos son de igual magnitud como se demuestra en este caso.

5) Trazando el simétrico del punto B respecto al eje x (B') y uniendo el punto A con B', se cumple que la distancia más corta entre dos puntos es la recta que los une ya que las distancias $CB = CB'$, por lo tanto la solución de este problema es la distancia $AB' = AC + CB$.



$$d(AB') = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (-y_B - y_A)^2}$$

6) Como es positivo "$r = \frac{3}{5}$" el punto $W(x_W, y_W)$ es interno, por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} x_W &= \frac{rx_M + x_L}{1+r} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)(5) + (-4)}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{3-4}{\frac{8}{5}} = -\frac{5}{8} \\ y_W &= \frac{ry_M + y_L}{1+r} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)(-1) + (-2)}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{10}{5}}{\frac{8}{5}} = -\frac{13}{8} \end{aligned}\right\} \quad W\left(-\frac{5}{8}, -\frac{13}{8}\right)$$

7)
$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{\overline{QP}}{\overline{P_1R}} = \frac{x_P - x_Q}{x_R - x_P} = \frac{0-3}{-6-0} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \\ r &= \frac{y_P - y_Q}{y_R - y_P} = \frac{4-6}{0-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad r = \frac{1}{2}$$

8)

$$\left.\begin{array}{l} x_G = \dfrac{rx_B + x_A}{1+r} = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)(3)+(-1)}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{-2}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{6}{2} = -3 \\[2ex] y_G = \dfrac{ry_B + y_A}{1+r} = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)(-2)+4}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{12}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{14}{2} = 7 \end{array}\right\} \quad G(-3,7)$$

9) $x_M = \dfrac{x_C + x_D}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = 1 \quad ; \quad y_M = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1 \quad ; \quad M(1,1)$

10) Las razones son las siguientes:

$$\frac{P_1A}{AP_2} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{P_1B}{BP_2} = 1 \quad ; \quad \frac{P_1C}{CP_2} = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} x_A = \dfrac{rx_{P_2} + x_{P_1}}{1+r} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)(6)+(-2)}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{2-2}{\frac{4}{3}} = 0 \\[2ex] y_A = \dfrac{ry_{P_2} + y_{P_1}}{1+r} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)(-1)+(3)}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{-\frac{1}{3}+\frac{9}{3}}{\frac{4}{3}} = 2 \end{array}\right\} \quad A(0,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_B = \dfrac{rx_{P_2} + x_{P_1}}{1+r} = \dfrac{(1)(6)+(-2)}{1+1} = \dfrac{6-2}{2} = 2 \\[2ex] y_B = \dfrac{ry_{P_2} + y_{P_1}}{1+r} = \dfrac{(1)(-1)+3}{1+1} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \end{array}\right\} \quad B(2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_C = \dfrac{rx_{P_2} + x_{P_1}}{1+r} = \dfrac{(3)(6)+(-2)}{1+3} = \dfrac{18-2}{4} = 4 \\[2ex] y_C = \dfrac{ry_{P_2} + y_{P_1}}{1+r} = \dfrac{(3)(-1)+3}{1+3} = \dfrac{-3+3}{4} = 0 \end{array}\right\} \quad C(4,0)$$

4.6. EN EL ESPACIO: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA.

1) $d(OP_1)=\sqrt{(-2)^2+(4)^2+(-4)^2}=\sqrt{36}=6$

$d(OP_2)=\sqrt{(-5)^2+(10)^2+(3)^2}=\sqrt{134}\approx 11.58$

$d(OP_3)=\sqrt{(11)^2+(-4)^2+(3)^2}=\sqrt{146}\approx 12.08$

2) Sobre el eje de las ordenadas cualquier punto es de la forma $P(0,y,0)$ y <u>equidistar</u> significa que esté a la misma distancia de P_1 y P_2 por lo tanto: $d(PP_1)=d(PP_2)$

$$\sqrt{(x_1-x_P)^2+(y_1-y_P)^2+(z_1-z_P)^2}=\sqrt{(x_2-x_P)^2+(y_2-y_P)^2+(z_2-z_P)^2}$$

$$\sqrt{(7-0)^2+(-3-y)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(-5-0)^2+(7-y)^2+(5-0)^2}$$

$$(7-0)^2+(-3-y)^2+(1-0)^2=(-5-0)^2+(7-y)^2+(5-0)^2$$
$$49+9+6y+y^2+1=25+49-14y+y^2+25$$
$$\cancel{y^2}+6y+59=\cancel{y^2}-14y+99$$
$$6y+14y=99-59$$
$$20y=40 \quad ; \quad y=2$$

El punto es: $P(0,2,0)$

3) $d(AB)=\sqrt{(2+1)^2+(-6-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{9+64+1}=\sqrt{74}\approx 8.60$

$d(BC)=\sqrt{(0-2)^2+(5+6)^2+(2-3)^2}=\sqrt{4+121+1}=\sqrt{126}\approx 11.22$

$d(AC)=\sqrt{(0+1)^2+(5-2)^2+(2-4)^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}\approx 3.74$

4) Calculamos la magnitud de cada lado:

$d(AB)=\sqrt{(-5-3)^2+(3+4)^2+(-2-7)^2}=\sqrt{64+49+81}=\sqrt{194}\approx 13.93$

$d(BC)=\sqrt{(1+5)^2+(2-3)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{36+1+1}=\sqrt{38}\approx 6.16$

$d(AC)=\sqrt{(1-3)^2+(2+4)^2+(-3-7)^2}=\sqrt{4+36+100}=\sqrt{140}\approx 11.83$

Como sus tres lados son de diferente magnitud, con el Teorema de Pitágoras verificamos si es triángulo rectángulo:

$$(AC)^2+(BC)^2=(AB)^2$$

$140+38\neq 194$; luego no es triángulo rectángulo y sólo es triángulo <u>escaleno</u>.

5) Como el centro de gravedad $G(-1,1,5)$ coincide con el punto medio de la longitud de la varilla, tenemos que:

$$\frac{x_A+x_B}{2}=-1\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}=1\ ;\ \frac{z_A+z_B}{2}=5$$

$$\frac{x_A-1}{2}=-1\ ;\ \frac{y_A-2}{2}=1\ ;\ \frac{z_A+7}{2}=5$$

$$x_A=-2+1\ ;\ y_A=2+2\ ;\ z_A=10-7$$

$$x_A=-1\ ;\ y_A=4\ ;\ z_A=3$$

Las coordenadas del otro extremo son: $A(-1,4,3)$

6) $x=\dfrac{rx_2+x_1}{1+r}=\dfrac{(-1)(-1)+1}{1-1}=\dfrac{2}{0}$ está indeterminado ya que no es posible dividir entre cero.

Por lo tanto este problema no tiene solución.

7) Recordemos que si $r=1$, se trata del punto medio del segmento:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4-4}{2}=\frac{0}{2}=0\ ;\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-2+12}{2}=\frac{10}{2}=5\ ;\ y=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{-4+6}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(0,5,1)$$

8) $x=\dfrac{rx_2+x_1}{1+r}=\dfrac{(3)(10)+10}{1+3}=\dfrac{40}{4}=10$; $y=\dfrac{ry_2+y_1}{1+r}=\dfrac{(3)(15)+(-4)}{1+3}=\dfrac{41}{4}=10.25$

$$z=\frac{rz_2+z_1}{1+r}=\frac{(3)(16)+3}{1+3}=\frac{51}{4}=12.75\ ;\ P\left(10,\frac{41}{4},\frac{51}{4}\right)$$

9) $x=\dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)(4)+1}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{-1+1}{\frac{3}{4}}=\dfrac{0}{\frac{3}{4}}=0$; $y=\dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)(-1)+(-3)}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{12}{4}}{\frac{3}{4}}=-\dfrac{11}{3}$

$z=\dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)(1)+8}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{-\frac{1}{4}+\frac{32}{4}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{31}{3}$; $P\left(0,-\dfrac{11}{3},\dfrac{31}{3}\right)$

10) $x=\dfrac{(-3)(-2)+3}{1-3}=\dfrac{6+3}{-2}=-\dfrac{9}{2}$; $y=\dfrac{-(3)(1)+(-2)}{1-3}=\dfrac{-5}{-2}=\dfrac{5}{2}$

$z=\dfrac{(-3)(-3)+5}{1-3}=\dfrac{9+5}{-2}=-\dfrac{14}{2}=-7$; $P\left(-\dfrac{9}{2},\dfrac{5}{2},-7\right)$

4.7. CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS POR SUS LADOS Y POR SUS ÁNGULOS

1) $2340^0=180^0(n-2)$; despejando $n=\dfrac{2340^0}{180^0}+2=15$ lados, se trata de un <u>pentedecágono</u>.

2) $Sai=180^0(8-2)=1080^0$; cada ángulo interno mide $\dfrac{1080^0}{8}=135^0$

3) $\dfrac{180^0(n-2)}{n}=156^0$; $180^0n-360^0=156^0n$; $180^0n-156^0n=360^0$; $24^0n=360^0$

$n=\dfrac{360^0}{24^0}=15$ lados, es un pentedecágono.

4) $Sai=180^0(12-2)=1800^0$; cada ángulo interno mide $\dfrac{1800^0}{12}=150^0$, cada ángulo externo mide $180^0-150^0=30^0$.

5) Su ángulo externo mide $180^0-156^0=24^0$.

4.8. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

1) Como $\frac{LK}{L'K'}=\frac{KJ}{K'J'}=\frac{LJ}{L'J'}$; $\frac{LK}{3}=\frac{KJ}{7}=\frac{8}{4}=2$

$\frac{LK}{3}=2$; $LK=6$; $\frac{KJ}{7}=2$; $KJ=14$

2) $\Delta ABC \sim \Delta ADE$; $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$; $\frac{3}{DE}=\frac{12}{7}$; $DE=\frac{(3)(7)}{12}=\frac{21}{12}=1.75$

$\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$; $\frac{3}{1.75}=\frac{12.4}{AE}$; $AE=\frac{(12.4)(1.75)}{3}=7.23$

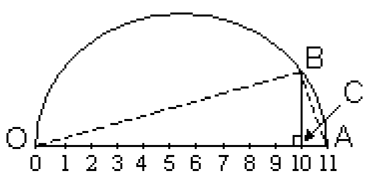
3) $\Delta ABC \sim \Delta DEC$; $\frac{ED}{AB}=\frac{CE}{BC}$; $\frac{15}{a}=\frac{8}{5}$; $a=\frac{(15)(5)}{8}=9.4\,[m]$

4) Si $\Delta KSL \sim \Delta SMK$; $\frac{SL}{SK}=\frac{SK}{MS}$; $\frac{x}{9}=\frac{9}{x-2}$; $x(x-2)=(9)(9)$; $x^2-2x-81=0$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+324}}{2}$; $x_1=10$ y $x_2=-8$

el negativo (-8) se descarta, solo interesa el positivo $x_1=10$

5)



La longitud de BC es $\sqrt{10}$

4.9. PENDIENTE DE UNA RECTA. CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

1) $m_{AB}=\frac{-2+4}{-3+0}=\frac{2}{-3}$; $\alpha=180^0-\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=146.31^0$

$m_{BC}=\frac{5+2}{0+3}=\frac{7}{3}$; $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right)=66.80^0$

$m_{CD}=\frac{3-5}{5-0}=\frac{-2}{5}$; $\alpha=180^0-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=158.20^0$

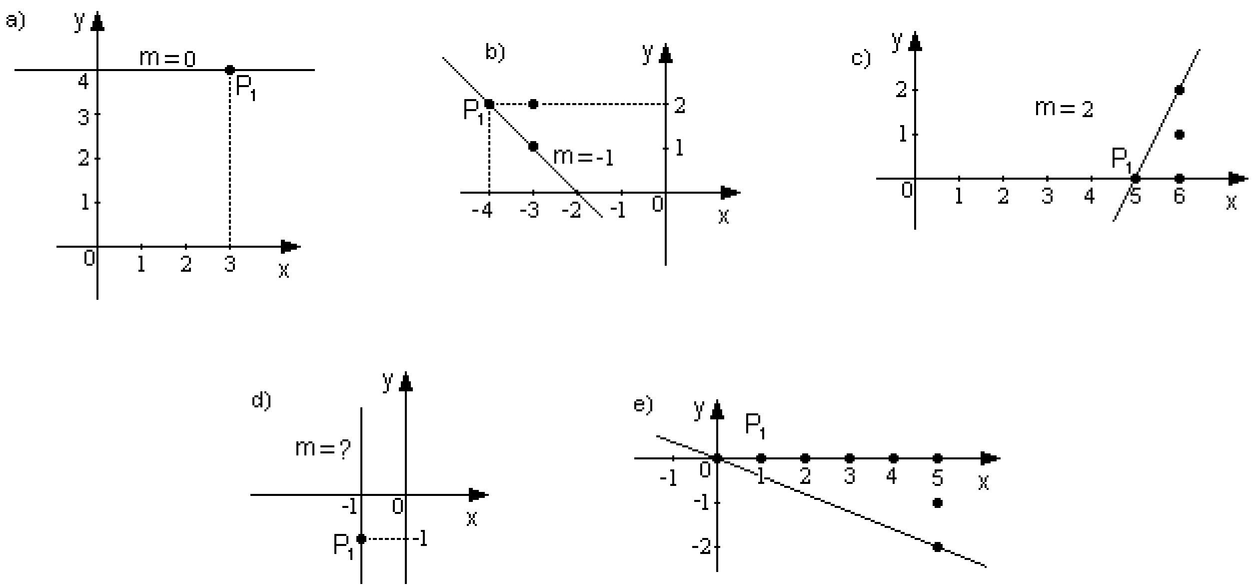
$m_{DE}=\frac{3+3}{5-4}=\frac{6}{1}=6$; $\alpha=\tan^{-1}(6)=80.54^0$

$m_{AE}=\frac{-3+4}{4-0}=\frac{1}{4}$; $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=14.04^0$

2) suponiendo que si son paralelas L_1 y L_2, sus ángulos de inclinación $\alpha_1 = \alpha_2$ y por lo tanto sus tangentes son iguales o sea que $\tan\alpha_1 = \tan\alpha_2$ y como $\tan\alpha_1 = m_1$ y $\tan\alpha_2 = m_2$ por lo tanto $m_1 = m_2$.

3) $m_{AB} = \dfrac{2-1}{1-4} = \dfrac{1}{-3}$; $m_{AC} = \dfrac{3-1}{-2-4} = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3}$ son colineales.

4)



5) $m_{13} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{2+3}{4+1} = \dfrac{5}{5} = 1$

$m_{24} = \dfrac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} = \dfrac{2+3}{-1-4} = \dfrac{5}{-5} = -1$

Si son perpendiculares entre sí.

4.10. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

1) $\tan\theta_1 = \dfrac{4 - \dfrac{1}{3}}{1 + (4)\left(\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{\dfrac{12-1}{3}}{\dfrac{3+4}{3}} = \dfrac{11}{7}$; $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{11}{7}\right) = 57.53^0$; $\theta_2 = 180^0 - 57.53^0 = 122.47^0$

2) Si $\tan\theta = \dfrac{m_{TF} - m_{IF}}{1 + m_{TF}m_{IF}}$; m_{TF} = pendiente de la recta donde termina la flecha.

m_{IF} = pendiente de la recta donde inicia la flecha.

$$\tan 35^0 = \frac{m_{TF} - \frac{3}{2}}{1 + m_{TF}\left(\frac{3}{2}\right)}$$; despejando m_{TF}, $m_{TF} = -44$

3) Tenemos que $\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$; con $m_2 m_1 \neq -1$

Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, sus pendientes son iguales o sea que $m_2 = m_1$, entonces el numerador de la fórmula es cero y por lo tanto la $\tan\theta_1 = 0$, luego $0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$; $0 = m_2 - m_1$ y $m_2 = m_1$, luego son paralelas L_1 y L_2.

4) $m_{AB} = \frac{1}{9}$; $m_{BC} = -\frac{3}{7}$; $m_{AC} = 2$

$\tan\alpha = \frac{17}{11}$; $\tan\beta = \frac{17}{30}$; $\tan\gamma = -17$

β es el menor y mide: $\beta = 29.68^0$

5) $m_{AB} = \frac{4}{7}$; $m_{CD} = \frac{y-3}{-1}$; $\tan 40^0 = \frac{\frac{y-3}{-1} - \frac{4}{7}}{1 + \left(\frac{y-3}{-1}\right)\left(\frac{4}{7}\right)}$

$$0.84 = \frac{-7y + 17}{-4y + 19} \; ; \; y \doteq 0.3$$

4.11. CÁLCULO DEL ÁREA DE UN POLÍGONO

1) $A = \frac{1}{2}(20) = 10\left[u^2\right]$

2) $A = \frac{1}{2}(65) = 32.50\left[u^2\right]$

3) $A = 0$; P_1, P_2, P_3 y P_4 si son colineales.

4) $A = \frac{1}{2}(240) = 120\left[m^2\right]$

5) $A = 51\left[u^2\right]$

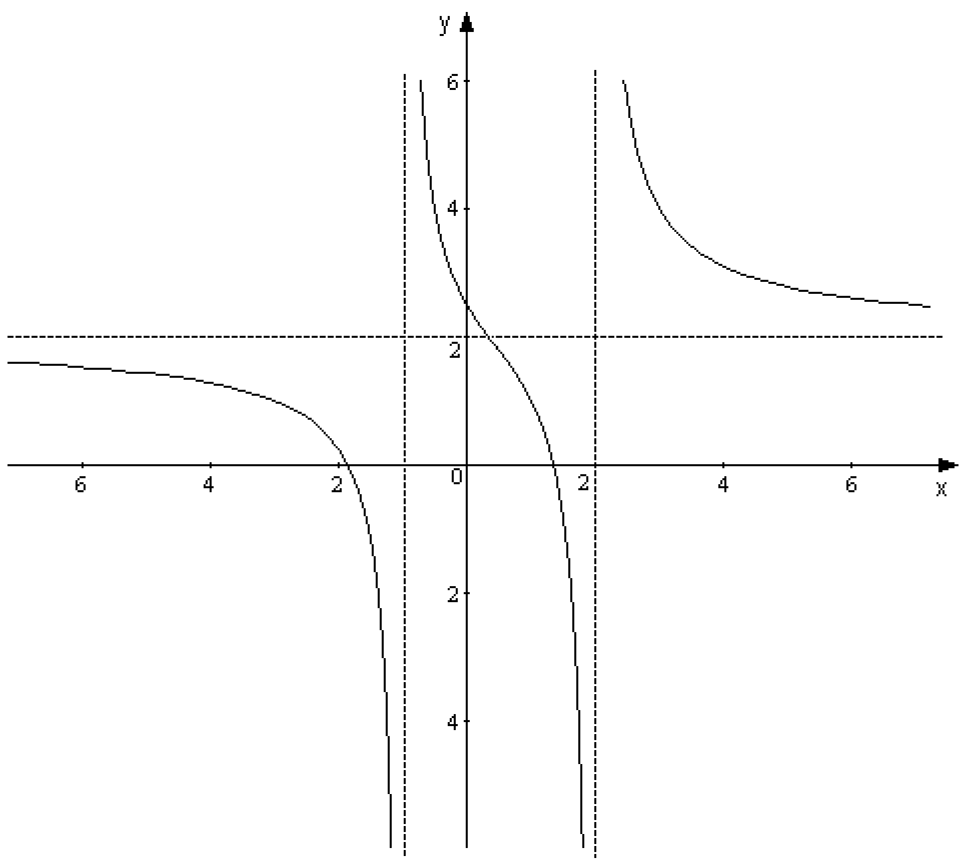
SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO V

5.1. DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN

1) $y = \dfrac{2x^2 + x - 5}{x^2 - x - 2}$

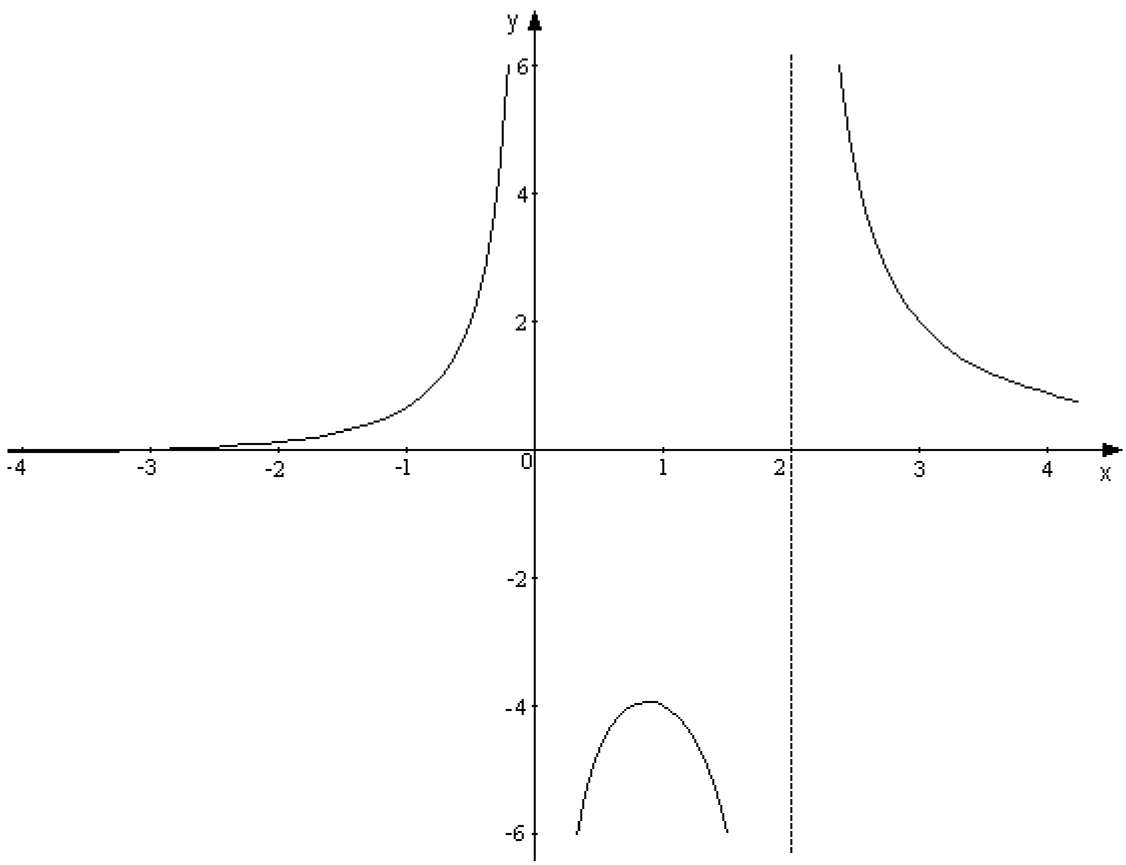
1. Dominio= $\mathbb{R} - \{-1, 2\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$
2. Intersecciones: a) Eje "x" ; $P_1(1.35, 0)$, $P_2(-1.85, 0)$

   b) Eje "y" ; $P_3\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$
3. Simetrías. a) Eje "x", no hay ; b) Eje "y", no hay ; c) Origen, no hay.
4. Asíntotas. a) Horizontales, $y = 2$; b) Verticales, $x = -1$, $x = 2$.
5. Tabulación. (la que proponga el estudiante).
6. Gráfica.



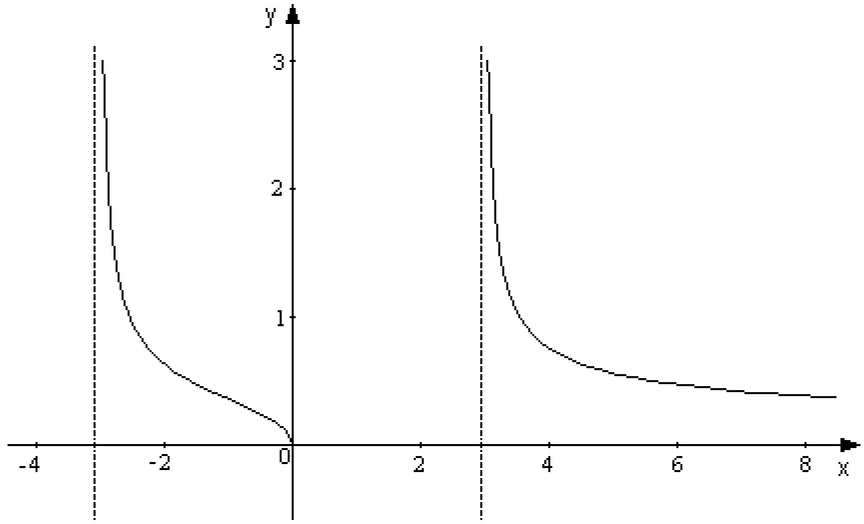
2) $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 2x}$

1. Dominio= $\mathbb{R} - \{0,2\} = (-\infty, 0) \cup (0,2) \cup (2, \infty)$
2. Intersecciones: a) Eje "x" ; $P_1(-3,0)$; b) Eje "y" ; no hay.
3. Simetrías. a) Eje "x", no hay ; b) Eje "y", no hay ; c) Origen, no hay.
4. Asíntotas. a) Horizontales, $y = 0$ (Eje "x") ; b) Verticales, $x = 0$, $x = 2$.
5. Tabulación. (la que proponga el estudiante).
6. Gráfica.



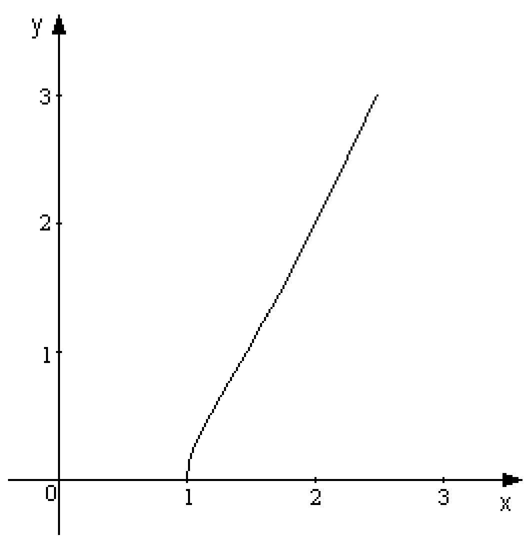
3) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 9}}$

1. Dominio= $(-3, 0] \cup (3, \infty)$
2. Intersecciones: a) Eje "x" ; $P_1(0,0)$; b) Eje "y" ; $P_1(0,0)$
3. Simetrías. a) Eje "x", no hay ; b) Eje "y", no hay ; c) Origen, no hay.
4. Asíntotas. a) Horizontales, $y = 0$ (Eje "x") ; b) Verticales, $x = -3$, $x = 3$.
5. Tabulación. (la que proponga el estudiante).
6. Gráfica.



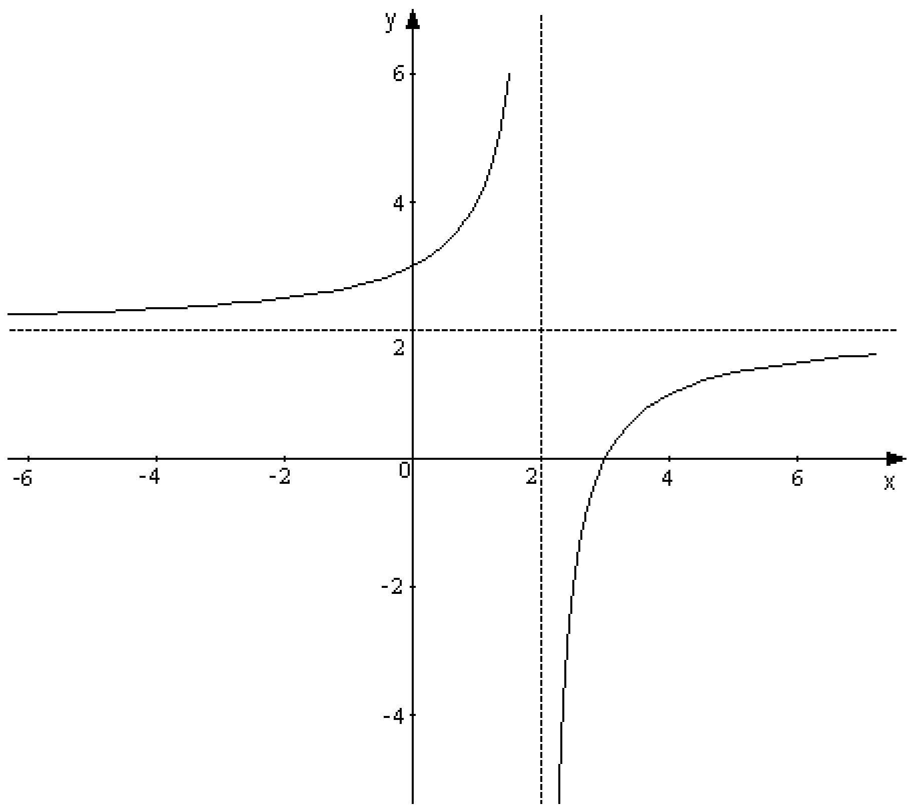
4) $y = \sqrt{x^2(x-1)}$

1. Dominio= $\{0\} \cup [1, \infty)$
2. Intersecciones: a) Eje " x " ; $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$; b) Eje " y " ; $P_1(0,0)$
3. Simetrías. a) Eje " x ", no hay ; b) Eje " y ", no hay ; c) Origen, no hay.
4. Asíntotas. a) Horizontales, no tiene ; b) Verticales, no tiene.
5. Tabulación. (la que proponga el estudiante).
6. Gráfica.



5) $xy-2x-2y+6=0$

1. Dominio= $\mathbb{R}-\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$
2. Intersecciones: a) Eje " x " ; $P_1(3,0)$; b) Eje " y " ; $P_2(0,3)$
3. Simetrías. a) Eje " x ", no hay ; b) Eje " y ", no hay ; c) Origen, no hay.
4. Asíntotas. a) Horizontales, $y=2$; b) Verticales, $x=2$.
5. Tabulación. (la que proponga el estudiante).
6. Gráfica.



SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO VI

6.1. ECUACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

1) $12x+8y-36=0$
2) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$
3) $2x-y-8=0$
4) $y^2-6x+9=0$
5) $3x^2+4y^2-24x+36=0$

6.3. ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIDOS:

a) Dos puntos.

1) $4x+6y-10=0$
2) $x-y+2=0$
3) $x-6y+4=0$
4) $x-y=0$
5) $8x-y-4=0$

b) Su pendiente y un punto.

1) $3x+4y+10=0$
2) $x+y-8=0$
3) $2x+3y-9=0$
4) $2x-y-8=0$
5) $x-4y-5=0$

c) Su pendiente y la ordenada al origen.

1) $y=-4x-3$ ó $4x+y+3=0$
2) $y=\frac{4}{3}x+2$ ó $\frac{4}{3}x-y+2=0$ ó $4x-3y+6=0$
3) $y=-1$ ó $y+1=0$
4) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$ ó $\frac{1}{2}x+y+\frac{2}{3}=0$ ó $3x+6y+4=0$
5) $y=3x+\frac{5}{3}$ ó $3x-y+\frac{5}{3}=0$ ó $9x-3y+5=0$

d) Conocidas las intersecciones de la recta con los ejes coordenados.

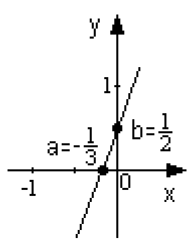
1) $3x-3y+3=0$
2) $x-y-3=0$
3) $2x+4y-8=0$
4) $3x+5y-15=0$
5) $4x-y-4=0$

e) La distancia al origen y un ángulo.

1) $x\cos 50^0+ysen50^0-1.7=0$; $0.64x+0.77y-1.7=0$
2) $x\cos 120^0+ysen120^0-3.5=0$; $0.5x-0.87y+3.5=0$
3) $x\cos 190^0+ysen190^0-2=0$; $0.98x+0.17y+2=0$
4) $x\cos 270^0+ysen270^0-4.2=0$; $y+4.2=0$ ó $y=-4.2$
5) $x\cos 90^0+ysen90^0-0=0$; $y=0$

6.4. FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA: GENERAL, SIMPLIFICADA, SIMÉTRICA Y NORMAL.

1)



$-3x+2y-1=0$ forma general.

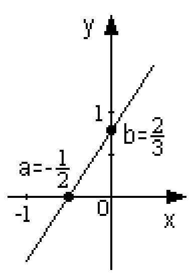
Si $m=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{3}$; como $C<0$; $k=\frac{1}{\sqrt{13}}$

$y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ forma simplificada.

$\frac{x}{-\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$ forma simétrica.

$-\frac{3}{\sqrt{13}}x+\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{1}{\sqrt{13}}=0$ forma normal.

2)



$4x-3y+2=0$ forma general.

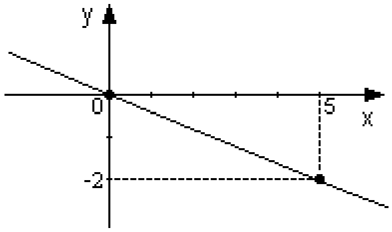
Si $m=\frac{4}{3}$, $b=\frac{2}{3}$, $a=-\frac{1}{2}$; como $C>0$; $k=-\frac{1}{5}$

$y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ forma simplificada.

$\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{2}{5}}=1$ forma simétrica.

$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{2}{5}=0$ forma normal.

3)



$2x+5y=0$ forma general.

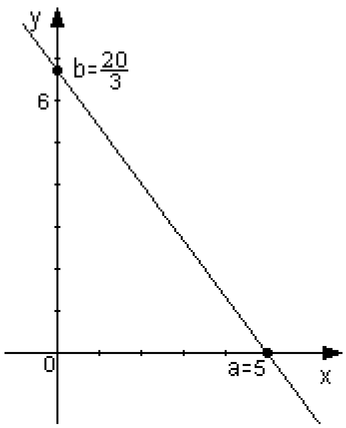
Si $m=-\frac{2}{5}$, $b=0$, $a=0$; como $C=0$, $B\neq 0$; $k=\frac{1}{\sqrt{29}}$

$y=-\frac{2}{5}x$ forma simplificada.

No existe forma simétrica ya que $a=b=0$

$\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{5}{\sqrt{29}}=0$ forma normal.

4)



$\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-4=0$ forma general.

$5\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-4\right)=5(0)$

$4x+3y-20=0$ forma general con coeficientes enteros.

Si $m=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{20}{3}$, $a=5$; como $C<0$, $k=\frac{1}{5}$

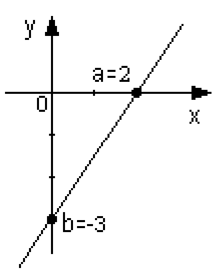
$y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$ forma simplificada.

$\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{20}{3}}=1$ forma simétrica.

$\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-4=0$ forma normal.

Esto quiere decir que en este problema la forma general y normal son iguales.

5)



$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+1=0$ forma general.

$(-6)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+1\right)=(-6)(0)$

$3x-2y-6=0$ forma general con coeficientes enteros.

Si $m=\frac{3}{2}$, $b=-3$, $a=2$; como $C<0$; $k=\frac{1}{\sqrt{13}}$

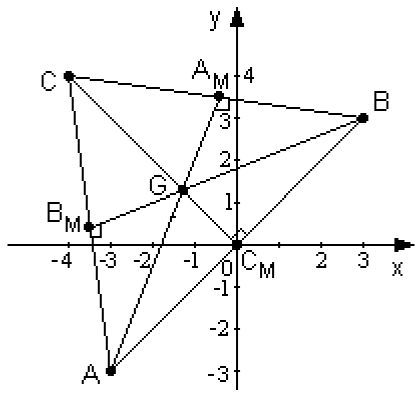
$y=\frac{3}{2}x-3$ forma simplificada.

$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$ forma simétrica.

$\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$ forma normal.

6.5. ECUACIONES DE: LAS MEDIANAS, MEDIATRICES Y ALTURAS DE UN TRIÁNGULO, SUS PUNTOS DE INTERSECCIÓN (G, C y H) Y RECTA EULER.

1) $A(-3,3)$, $B(3,3)$, $C(-4,4)$

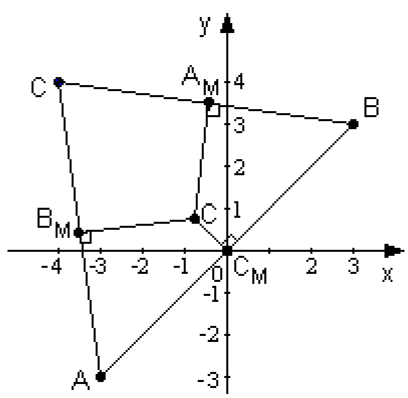


$$\left.\begin{array}{l} A_M\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right) \\ B_M\left(-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right) \\ C_M(0,0) \end{array}\right\}\text{Puntos medios de cada lado}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=1 \\ m_{BC}=-\frac{1}{7} \\ m_{CA}=-7 \end{array}\right\}\text{Pendientes de cada lado}$$

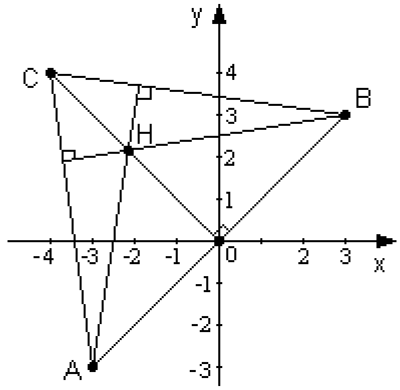
$$\left.\begin{array}{l} AA_M : 13x-5y+24=0 \\ BB_M : 5x-13y+24=0 \\ CC_M : x+y=0 \end{array}\right\}\text{Ecuaciones de las medianas} \qquad G\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

2)



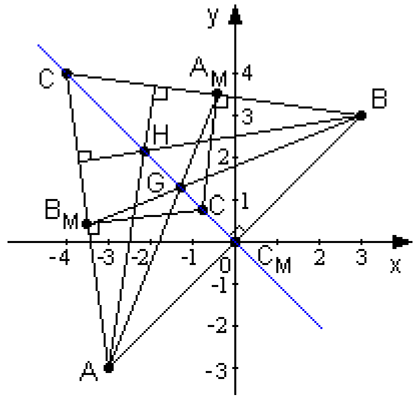
$$\left.\begin{array}{l} CA_M : y=7x+7 \\ CB_M : y=\frac{1}{7}x+1 \\ CC_M : y=-x \end{array}\right\}\text{Ecuaciones de las mediatrices} \qquad C\left(-\frac{7}{8},\frac{7}{8}\right)$$

3)



$$\left.\begin{array}{l} AH : y=7x+18 \\ BH : y=\frac{1}{7}x+\frac{18}{7} \\ CH : y=-x \end{array}\right\}\text{Ecuaciones de las alturas} \qquad H\left(-\frac{9}{4},\frac{9}{4}\right)$$

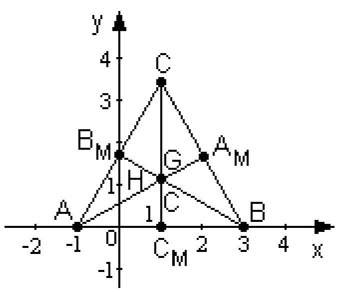
4)



$m_{GC} = -1$; $m_{GH} = -1$

Ecuación de Euler: $x + y = 0$

5) $A(-1,0)$, $B(3,0)$, $C(1,2\sqrt{3})$



$$\left.\begin{array}{l} A_M\left(2, \sqrt{3}\right) \\ B_M\left(0, \sqrt{3}\right) \\ C_M(1,0) \end{array}\right\} \text{Puntos medios de cada lado}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = 0 \\ m_{BC} = -\sqrt{3} \\ m_{AC} = \sqrt{3} \end{array}\right\} \text{Pendientes de cada lado}$$

$$\left.\begin{array}{l} AA_M : \sqrt{3}x - 3y + \sqrt{3} = 0 \\ BB_M : \sqrt{3}x + 3y - 3\sqrt{3} = 0 \\ CC_M : x - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de las medianas}$$

$$G\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} CA_M : x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \\ CB_M : x + \sqrt{3}y - 3 = 0 \\ CC_M : x - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de las mediatrices}$$

$$C\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} AH : x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \\ BH : x + \sqrt{3}y - 3 = 0 \\ CH : x - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de las alturas}$$

$$H\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$m_{GC} = m_{GH} =$ No existe ; Ecuación de Euler: $x - 1 = 0$ ó $x = 1$

6.6. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

1) $P_1(4,1)$, $y=\frac{1}{2}x+3$

forma general $\frac{1}{2}x-y+3=0$; $d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\frac{1}{2}(4)-(1)+3}{-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}=-\frac{8}{\sqrt{5}}\approx-3.6$

2) $P_1(3,5)$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$

forma general $x+y-5=0$; $d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{(3)+(5)-5}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 2.1$

3) $P_1(-2,1)$, $\frac{1}{2}x+2y+4=0$; $d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\frac{1}{2}(-2)+2(1)+4}{-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2)^2}}=-\frac{10}{\sqrt{17}}\approx-2.4$

4) $L_1: 2x-y+3=0$; $L_2: 4x-2y-2=0$

si $x=0$ en L_1, $y=3$, $P_1(0,3)$

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{4(0)-2(3)-2}{\sqrt{(4)^2+(-2)^2}}=\frac{-8}{\sqrt{20}}\approx-1.8$$

5) $L_1: 3x-4y-6=0$; $d=2$ (positiva)

sustituyendo valores en $d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

$2=\frac{3x-4y-6}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}$; $2=\frac{3x-4y-6}{\sqrt{25}}$; $10=3x-4y-6$; $3x-4y-16=0$

6.7. ECUACIÓN DE LAS BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO Y SU PUNTO DE INTERSECCIÓN “I” (INCENTRO)

1) $A(0,4)$, $B(4,0)$ y $C(0,-7)$, $D(1,0)$

Ecuación de la recta AB: $x+y-4=0$
Ecuación de la recta CD: $7x-y-7=0$
Ecuación de la bisectriz del ángulo agudo: $12x+4y-27=0$
Ecuación de la bisectriz del ángulo suplementario: $2x-6y+13=0$

2) $(L_1)\ldots\ \frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$ y $(L_2)\ldots\ y=7x+7$

Ecuación de la bisectriz del ángulo agudo θ: $6x+2y-9=0$

3) (L_1) pasa por $A(1,-1)$ y tiene pendiente $m_1=\frac{3}{4}$, (L_2) pasa por $B(-1,-6)$ y tiene pendiente $m_2=\frac{4}{3}$

Ecuación de la bisectriz del ángulo agudo: $x-y-3=0$

4) $A\left(\frac{5}{2},-\frac{15}{2}\right)$, $B(5,0)$, $C\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

Ecuaciones de las bisectrices en:
Ángulo interior en el vértice A: $2x-5=0$
Ángulo interior en el vértice B: $x-y-5=0$
Ángulo interior en el vértice C: $2x+4y+5=0$

5) Coordenadas del incentro del inciso anterior: $I\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$

Distancia del incentro al lado AB: $-\dfrac{3\left(\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2}\right)-15}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

Distancia del incentro al lado BC: $-\dfrac{\frac{5}{2}-3\left(-\frac{5}{2}\right)-5}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

Distancia del incentro al lado CA: $\dfrac{3\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

Entonces, en efecto, $I\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$ es el centro del círculo inscrito al triángulo A,B,C.

6.8. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

1) $(L)\ldots\ x-y+5=0$; $(L')\ldots\ x-y+2=0$

$$P=\frac{5}{\sqrt{2}}\quad ;\quad P'=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

El origen del mismo lado de L y L': $d=\left|p-p'\right|=\left|\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\right|=\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 2.12$

2) $(L)\ldots\ x-3y-3=0$; $(L')\ldots\ x-3y+6=0$

$$P=\frac{3}{\sqrt{10}}\quad ;\quad P'=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

El origen entre las dos rectas: $d=p+p'=\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{9}{\sqrt{10}}\approx 2.8$

3) $(L)\ldots\ 3x+y-3=0$; $(L')\ldots\ 3x+y-1=0$

$$P=\frac{-3}{-\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\quad ;\quad P'=\frac{-1}{-\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$d=\left|p-p'\right|=\left|\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\right|=\frac{2}{\sqrt{10}}\approx 0.6$

4) $(L)\ldots\ 2x-5y+7=0$; $(L')\ldots\ 2x-5y=0$

$$P=\frac{7}{\sqrt{29}}\quad ;\quad P'=\frac{0}{\sqrt{29}}=0$$

$d=p+p'=\frac{7}{\sqrt{29}}+0=\frac{7}{\sqrt{29}}\approx 1.3$

5) $(L)\ldots\ 2y-6=0$; $(L')\ldots\ 2y-2=0$

$$P=\frac{-6}{-\sqrt{4}}=\frac{6}{2}=3\quad ;\quad P'=\frac{-2}{-2}=1$$

$d=\left|p-p'\right|=\left|3-1\right|=2$

SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO VII

7.3. CRITERIOS PARA IDENTIFICAR A LA CÓNICA QUE REPRESENTA UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

1) $2x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2-8x-4y+8=0$

- $B^2-4AC=(2)^2-4(2)\left(\frac{1}{2}\right)=4-4=0$
- Es una PARÁBOLA
- Su eje rota un ángulo "α" respecto a los ejes x, y.
- $F=8$, indica que la parábola no pasa por el origen.

2) $5x^2-2xy+2y^2-2y-71=0$

- $B^2-4AC=(-2)^2-4(5)(2)=4-50=-46$
- Es una ELIPSE.
- Sus ejes rotan un ángulo "α" respecto a los ejes x, y.
- Si $D=0$, el centro de la elipse está sobre el eje "y".
- $F=-71$, indica que la elipse no pasa por el origen.

3) $16x^2-25y^2-400=0$

- Como $B=0$, $A=16$ y $C=-25$, es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes son paralelos a los ejes coordenados x, y.
- Si $D=E=0$, su centro coincide con el origen.
- $F=-400$, indica que la hipérbola no pasa por el origen.

4) $16x^2-9y^2+96x-72y-144=0$

- Como $B=0$, $A=16$ y $C=-9$, es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes son paralelos a los ejes coordenados x, y.
- Si $D=96$ y $E=-72$, indica que el centro está fuera del origen.
- $F=-400$, indica que la hipérbola no pasa por el origen.

5) $-3x^2-3y^2+18x+18y-27=0$

- Como $B=0$, $A=C=-3$, es una CIRCUNFERENCIA.
- Si $D=18$, $E=18$, el centro está fuera del origen.
- $F=-27$, indica que la circunferencia no pasa por el origen.

6) $3x^2+4xy+-6x+8=0$

- Si $B=4$, $B^2-4AC=(4)^2-4(3)(0)=16$, es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes rotan un ángulo "α" respecto a los ejes x,y.
- Si $D=-6$, $E=0$, indican que el centro está sobre el eje "x".
- $F=8$, indica que la hipérbola no pasa por el origen.

7) $x^2+y^2-9=0$

- Si $B=0$, $A=C=1$, es una CIRCUNFERENCIA.
- Si $D=E=0$, la circunferencia tiene centro en el origen.
- $F=-9$, indica que la circunferencia no pasa por el origen.

8) $x^2-4xy+2y^2=0$

- $B^2-4AC=(-4)^2-4(1)(2)=16-8$, es una HIPÉRBOLA.
- Como $D=E=0$, es una hipérbola que degenera en un par de rectas que se cortan.

9) $y^2-9x=0$

- Si $B=0$, $A=0$ y $C=1$, es una PARÁBOLA.
- Su eje es paralelo al eje "x".
- $F=0$, la parábola pasa por el origen.

10) $3x^2+4xy+y^2-2x-2=0$

- $B^2-4AC=(4)^2-4(3)(1)=16-12=4$, es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes rotan un ángulo "α" respecto de los ejes x,y.

- Si $D=-2$, $E=0$, el centro está sobre el eje "x".
- $F=-2$, indica que la hipérbola no pasa por el origen.

7.4. EXCENTRICIDAD

1) $F(2,-3)$; directriz: $x=3$; $e=\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{PF}{PA}=\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}}{x-3}=\dfrac{3}{2}$; $4y^2-5x^2+38x+24y-29=0$; Es una HIPÉRBOLA.

2) $F(0,4)$; directriz: $y=-1$; $e=0$

$\dfrac{PF}{PA}=\dfrac{\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}}{y+1}=0$; $x^2+y^2-8y+16=0$

Es una CIRCUNFERENCIA que degenera en el punto $P(0,4)$.

3) $F(4,-2)$; directriz: $y=2$; $e=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{PF}{PA}=\dfrac{\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}}{y-2}=\dfrac{1}{2}$; $4x^2+3y^2-32x+20y+76=0$; Es una ELIPSE.

4) $F(0,0)$; directriz: $x=-2$; $e=1$

$\dfrac{PF}{PA}=\dfrac{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}{x+2}=1$; $y^2-4x-4=0$; Es una PARÁBOLA horizontal.

5) $F(0,-3)$; directriz: $y=1$; $e=3$

$\dfrac{PF}{PA}=\dfrac{\sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2}}{y-1}=3$; $x^2-8y^2+24y=0$; Es una HIPÉRBOLA.

7.5. TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

TRASLACIÓN.

1) $4x^2 - y^2 + 24x + 6y + 23 = 0$ (Hipérbola)

Si $x = x' + h$, $y = y' + k$

$4x'^2 - y'^2 + (8h + 24)x' - (2k - 6)y' + 4h^2 - k^2 + 24h + 6k + 23 = 0$

$(h,k) = (-3,3)$; $4x'^2 - y'^2 - 4 = 0$

2) $3x^2 + 12x - 2y + 6 = 0$ (Parábola)

Si $x = x' + h$, $y = y' + k$

$3x'^2 + (6h + 12)x' - 2y' + 3h^2 + 12h - 2k + 6 = 0$

$(h,k) = (-2,-3)$; $3x'^2 - 2y' = 0$

3) $x^2 + 4y^2 + 4x + 24y + 36 = 0$ (Elipse)

Si $x = x' + h$, $y = y' + k$

$x'^2 + 4y'^2 + (2h + 4)x' - (8k + 24)y' + h^2 + 4k^2 + 4h + 24k + 36 = 0$

$(h,k) = (-2,-3)$; $x'^2 + 4y'^2 - 4 = 0$

4) $2y^2 - 4y - x - 1 = 0$ (Parábola)

Si $x = x' + h$, $y = y' + k$

$2y'^2 + (4k - 4)y' - x' + 2k^2 - 4k - h - 1 = 0$

$(h,k) = (-3,1)$; $2y'^2 - x' = 0$

5) $16y^2 - 4x^2 - 16x + 96y + 64 = 0$ (Hipérbola)

Si $x = x' + h$, $y = y' + k$

$16y'^2 - 4x'^2 + (32k + 96)y' - (8h + 16)x' + 16k^2 - 4h^2 - 16h + 96k + 64 = 0$

$(h,k) = (-2,-3)$; $16y'^2 - 4x'^2 - 64 = 0$

ROTACIÓN.

1) $3x^2 - 10xy - 3y^2 + 11x - 13y + 21 = 0$

$$\tan 2\alpha = \frac{-5}{3} \quad ; \quad \cos 2\alpha = \frac{-3}{\sqrt{34}} \quad ; \quad sen\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{34}}\right)} \quad ; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{34}}\right)} \quad ; \quad \alpha = 60.48^0$$

$$x = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{34}}\right)} - y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{34}}\right)} \quad ; \quad y = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{34}}\right)} + y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{34}}\right)}$$

2) $2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 18 = 0$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2}{1} = -2 \quad ; \quad \cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad sen\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \quad ; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \quad ; \quad \alpha = 58.28^0$$

$$x = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} - y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \quad ; \quad y = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

3) $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x = 0$

Como $A = C \quad ; \quad \alpha = 45^0 \quad ; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \quad ; \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$

4) $4x^2 - 2xy + 2y^2 + x - 4 = 0$

$$\tan 2\alpha = -1 \quad ; \quad \cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad sen\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad ; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad ; \quad \alpha = 67.5^0$$

$$x = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad ; \quad y = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

5) $x^2 - 2xy + 2y^2 - x - 1 = 0$

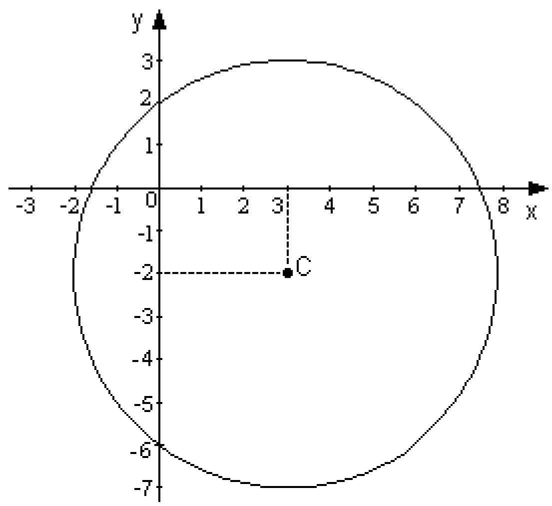
$$\tan 2\alpha = 2 \quad ; \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad sen\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \quad ; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \quad ; \quad \alpha = 31.72^0$$

$$x = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} - y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \quad ; \quad y = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO VIII

8.2. FORMAS ORDINARIA (CANÓNICA) Y GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

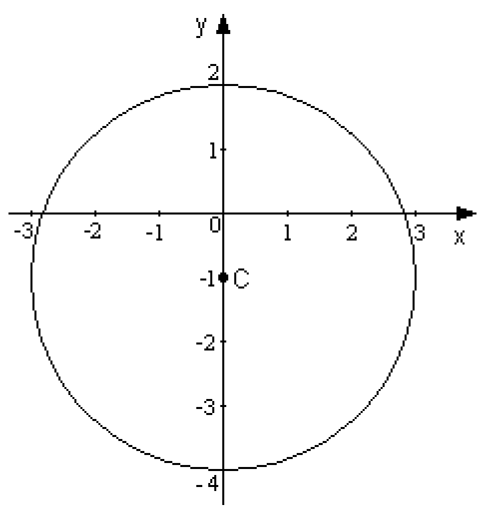
1) $C(3,-2)$; $r=5$



$(x-3)^2+(y+2)^2=25$ Forma ordinaria

$x^2+y^2-6x+4y-12=0$ Forma general

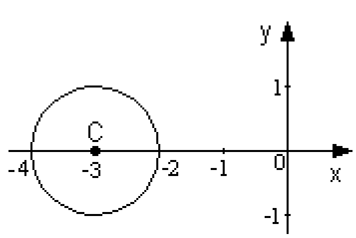
2) $C(0,-1)$; $r=3$



$x^2+(y+1)^2=9$ Forma ordinaria

$x^2+y^2+2y-8=0$ Forma general

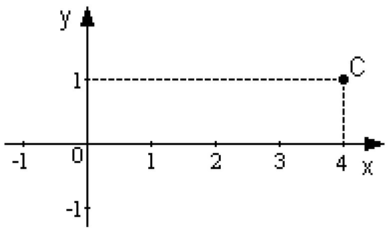
3) $C(-3,0)$; $r=1$



$(x+3)^2+y^2=1$ Forma ordinaria

$x^2+y^2+6x+8=0$ Forma general

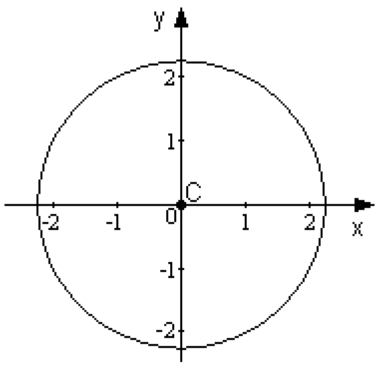
4) $C(4,1)$; $r = 0$



$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 0$ Forma ordinaria

$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17 = 0$ Forma general

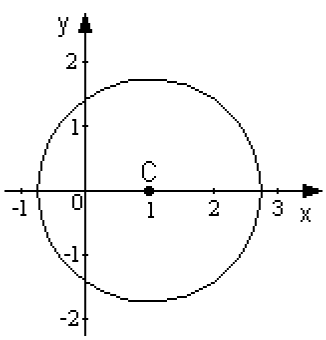
5) $C(0,0)$; $r = \sqrt{5}$



$x^2 + y^2 = 5$ Forma ordinaria

$x^2 + y^2 - 5 = 0$ Forma general

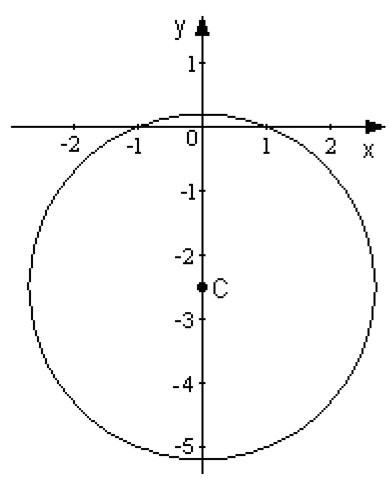
6) $-3x^2 - 3y^2 + 3x + 6 = 0$



$(x-1)^2 + y^2 = 3$ Forma ordinaria

$C(1,0)$; $r = \sqrt{3} \approx 2.7$

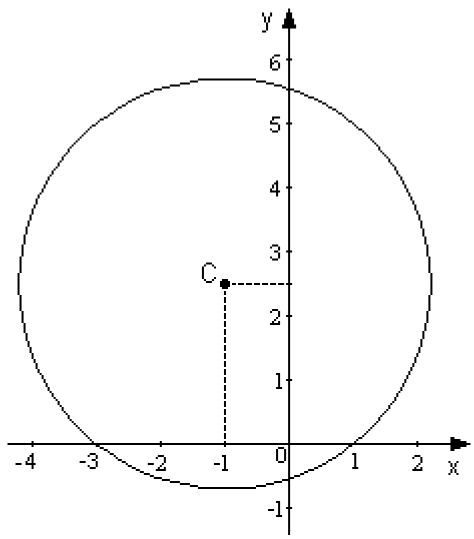
7) $x^2 + y^2 + 5y - 1 = 0$



$x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$ Forma ordinaria

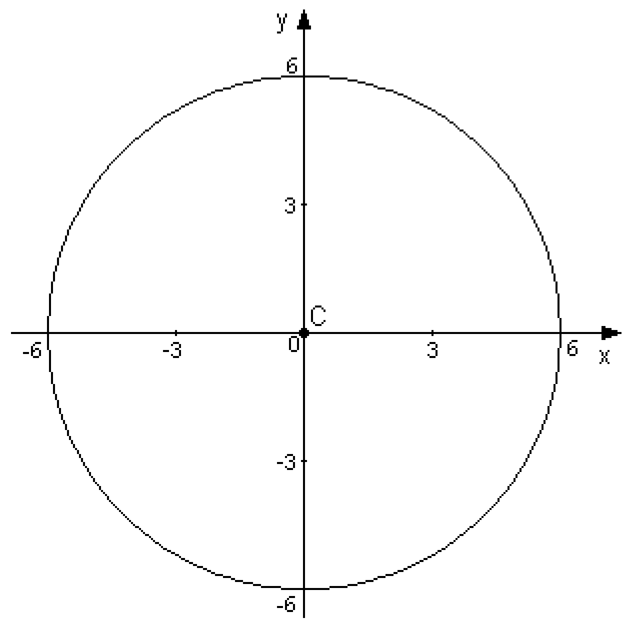
$C\left(0,-\frac{5}{2}\right)$; $r = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$; $r \approx 2.7$

8) $7x^2 + 7y^2 - 14x - 35y - 21 = 0$



$$\left(x+1\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}$$ Forma ordinaria

$$C\left(-1, \frac{5}{2}\right) \;\; ; \;\; r = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2} \;\; ; \;\; r \approx 3.2$$

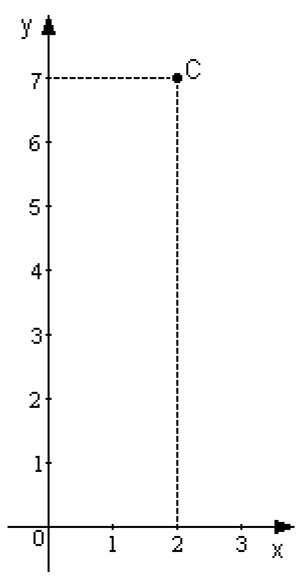


9) $x^2 + y^2 - 36 = 0$

$x^2 + y^2 = 36$ Forma ordinaria

$C(0,0)$; $r = \sqrt{36}$; $r = 6$

10) $2x^2 + 2y^2 - 8x - 28y + 106 = 0$



$x^2 + y^2 - 4x - 14y + 53 = 0$ Forma general

$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 0$ Forma ordinaria

$C(2,7)$; $r = 0$

8.3. CIRCUNFERENCIA DETERMINADA POR TRES CONDICIONES DADAS

1) $0D+0E+F=0 \quad \cdots(1) \quad ; \quad \Delta=-42$

$-3D-6E+F=-45 \quad \cdots(2) \quad ; \quad D=\dfrac{\Delta_D}{\Delta}=\dfrac{-294}{-42}=7$

$-7D+0E+F=-49 \quad \cdots(3) \quad ; \quad E=\dfrac{\Delta_E}{\Delta}=\dfrac{-168}{-42}=4 \quad ; \quad F=\dfrac{\Delta_F}{\Delta}=\dfrac{0}{-42}=0$

Ecuación: $\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2+(y+2)^2=\dfrac{65}{4} \quad ; \quad C\left(-\dfrac{7}{2},-2\right) \quad ; \quad r=\sqrt{\dfrac{65}{4}}$

2) Mediatriz de AB: $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{15}{4}$

Mediatriz de BC: $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$

$C\left(-\dfrac{7}{2},-2\right) \quad ; \quad r=CA=\sqrt{\dfrac{65}{4}}$

Ecuación: $\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2+(y+2)^2=\dfrac{65}{4}$

3)

$$\begin{array}{c} \\ + \\ - \\ + \\ - \end{array}\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \left|\begin{array}{cccc} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & -3 & -6 & 1 \\ 49 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right. \end{array}\Bigg| = (x^2+y^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & 1 \\ -7 & 0 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 45 & -6 & 1 \\ 49 & 0 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 45 & -3 & 1 \\ 49 & -7 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 45 & -3 & -6 \\ 49 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(x^2+y^2)(-42)-x(294)+y(-168)-1(0)=-42x^2-42y^2-294x-168y=0$$

Ecuación: $x^2+y^2+7x+4y=0$

4) $M_{AB}(2,-3)$; $m=\dfrac{1}{3}$; Mediatriz AB: $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{11}{3}$; $C\left(0,-\dfrac{11}{3}\right)$; $r=\dfrac{20}{3}$

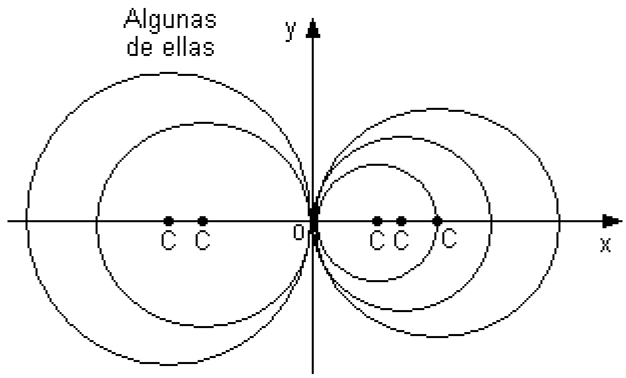
Ecuación: $x^2+\left(y+\dfrac{11}{3}\right)^2=\dfrac{400}{9}$

5) $M_{AB}\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$; $m=\dfrac{1}{3}$; Mediatriz AB: $y=\dfrac{1}{3}x-3$; $C(9,0)$; $r=\sqrt{85}$

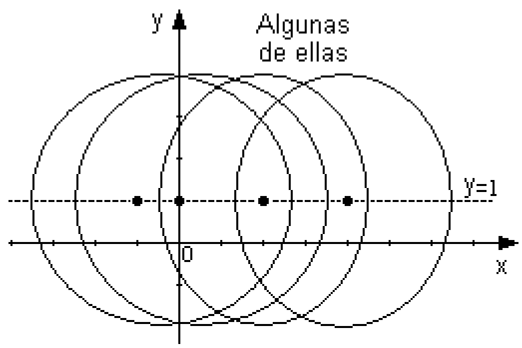
Ecuación: $(x-9)^2+y^2=85$

8.4. FAMILIAS DE CIRCUNFERENCIAS

1) $(x \pm r)^2 + y^2 = r^2$; $r > 0$, un parámetro representa la familia de circunferencias tangentes al eje "y", con centros sobre el eje "x", con todos los radios posibles.

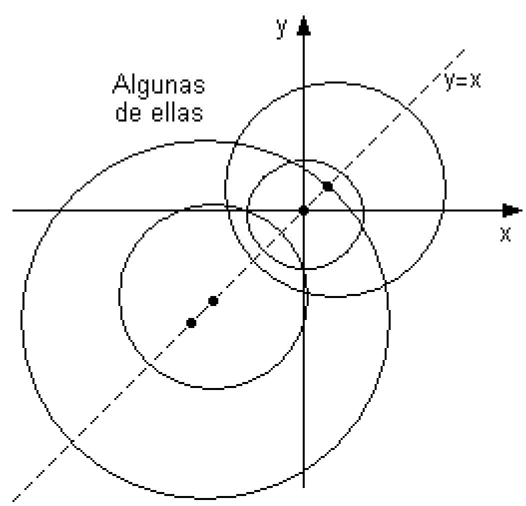


2) $(x-h)^2 + (y-1)^2 = 25$; $h \in \mathbb{R}$, un parámetro, representa la familia de circunferencias cuyos centros están sobre la recta $y = 1$ y de radio 5.

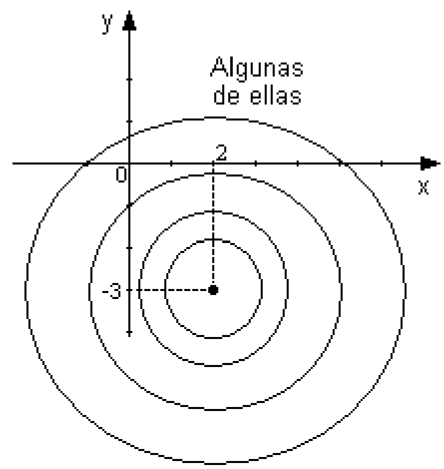


3) $(x-h)^2 + (y-h)^2 = r^2$; $h \in \mathbb{R}, r > 0$, dos parámetros, representa la familia de circunferencias que tienen su centro sobre la recta $y = x$, con todos los radios posibles.

4) $x^2 + y^2 + Dx + Dy = 0$; $D \in \mathbb{R}$, un parámetro, representa la familia de circunferencias cuyos centros se localizan sobre la recta $y = x$, con todos los radios posibles.



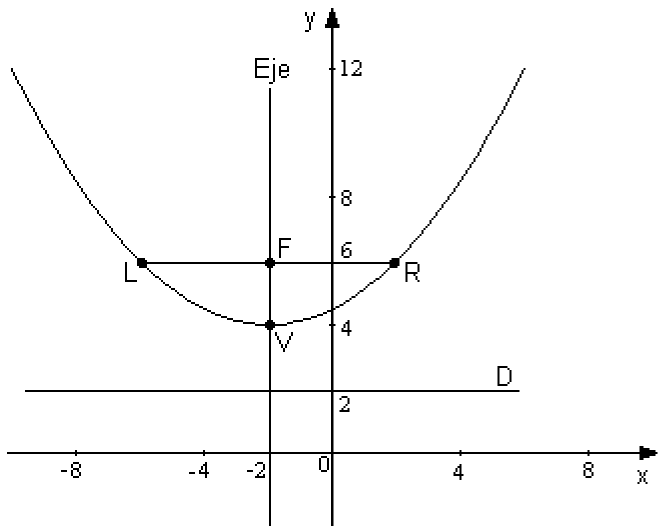
5) $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$; $r>0$, un parámetro, representa la familia de circunferencias concéntricas, cuyo centro tienen coordenadas $(2,-3)$, con todos los radios posibles.



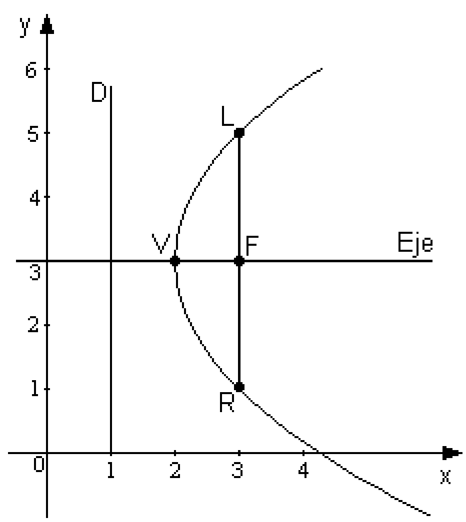
SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO IX

9.3. ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA EN LAS FORMAS ORDINARIA Y GENERAL CON EJE FOCAL PARALELO CON LOS EJES COORDENADOS

1) $(x+2)^2 = 8(y-4)$; $V(-2,4)$; $p=2$; $2p=4$; $F(-2,6)$; $L(-6,6)$; $R(2,6)$; Ec. eje: $x=-2$ Ec. "D": $y=2$

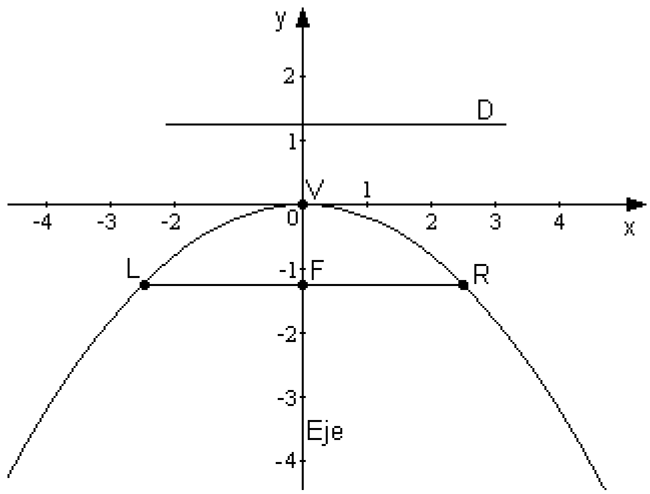


2) $(y-3)^2 = 4(x-2)$; $V(2,3)$; $p=1$; $2p=2$; $F(3,3)$; $L(3,5)$; $R(3,1)$; Ec. eje: $y=3$
Ec. "D": $x=1$



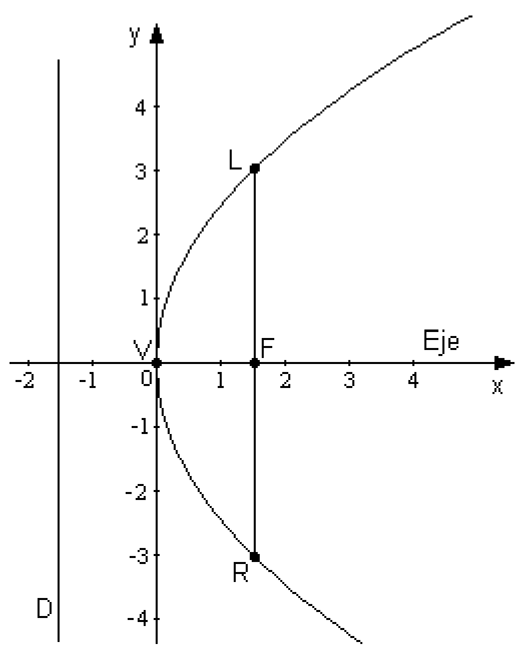
3) $x^2 = -5y$; $V(0,0)$; $p = \frac{5}{4}$; $2p = \frac{5}{2}$; $F\left(0,-\frac{5}{4}\right)$; $L\left(-\frac{5}{2},-\frac{5}{4}\right)$; $R\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{4}\right)$; Ec. eje: $x = 0$

Ec. "D": $y = \frac{5}{4}$



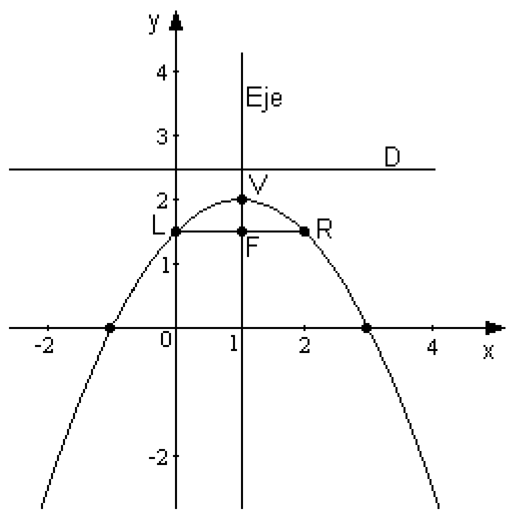
4) $y^2 = 6x$; $V(0,0)$; $p = \frac{3}{2}$; $2p = 3$; $F\left(\frac{3}{2},0\right)$; $L\left(\frac{3}{2},3\right)$; $R\left(\frac{3}{2},-3\right)$; Ec. eje: $y = 0$

Ec. "D": $x = -\frac{3}{2}$

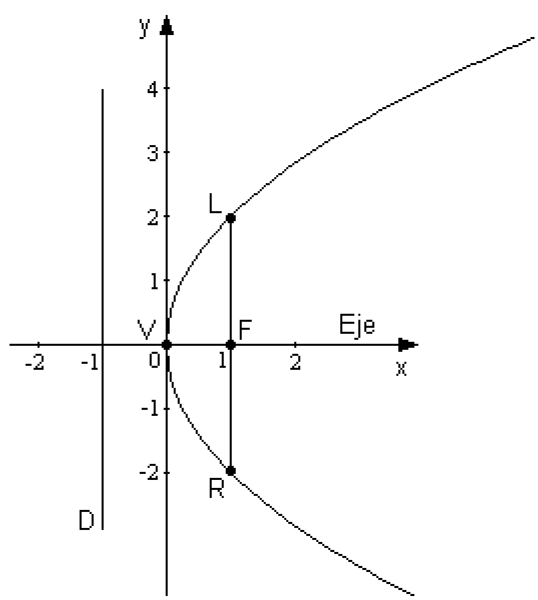


5) $(x-1)^2=-2(y-2)$; $V(1,2)$; $p=\frac{1}{2}$; $2p=1$; $F\left(1,\frac{3}{2}\right)$; $L\left(0,\frac{3}{2}\right)$; $R\left(2,\frac{3}{2}\right)$; Ec. eje: $x=1$

Ec. "D": $y=\frac{5}{2}$; Intersección con el eje "x": si $y=0$; $x=1\pm 2$; $(-1,0)$; $(3,0)$

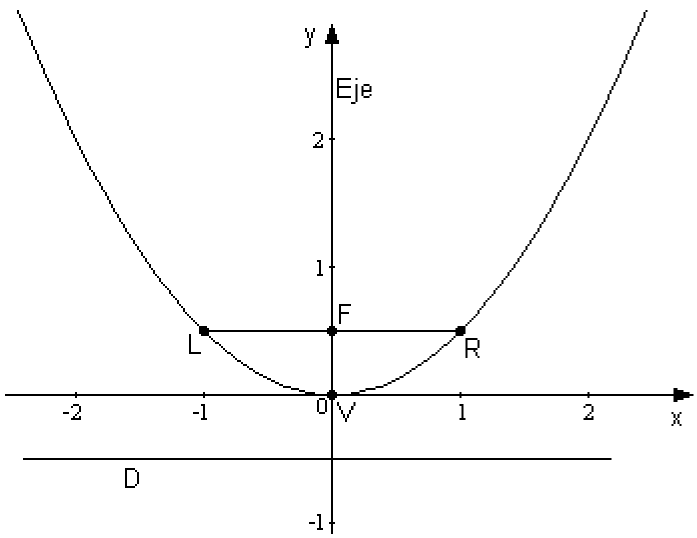


6) $y^2=4x$; $V(0,0)$; $p=1$; $2p=2$; $F(1,0)$; $L(1,2)$; $R(1,-2)$; Ec. eje: $y=0$
Ec. "D": $x=-1$

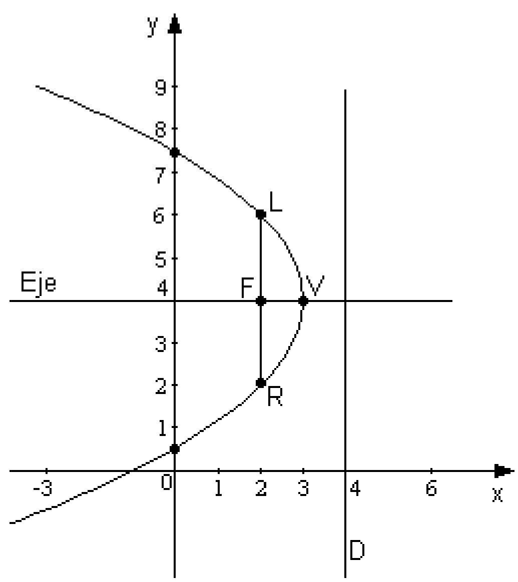


7) $x^2 = 2y$; $V(0,0)$; $p = \frac{1}{2}$; $2p = 1$; $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $L\left(-1, \frac{1}{2}\right)$; $R\left(1, \frac{1}{2}\right)$; Ec. eje: $x = 0$

Ec. "D": $y = -\frac{1}{2}$

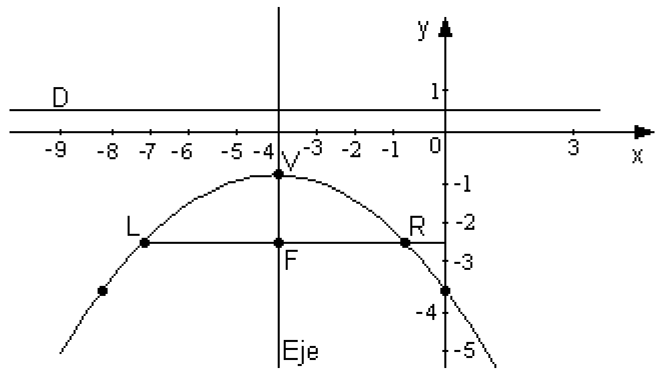


8) $(y-4)^2 = -4(x-3)$; $V(3,4)$; $p = 1$; $2p = 2$; $F(2,4)$; $L(2,6)$; $R(2,2)$; Ec. eje: $y = 4$
Ec. "D": $x = 4$; Intersección con el eje "y": si $x = 0$; $y = 4 \pm 2\sqrt{3}$; $\left(0, 4 + 2\sqrt{3}\right)$ $\left(0, 4 - 2\sqrt{3}\right)$

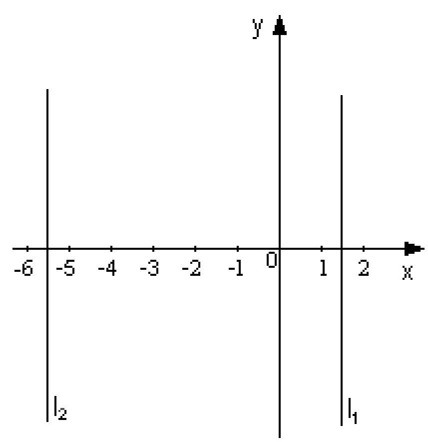


FORMA GENERAL

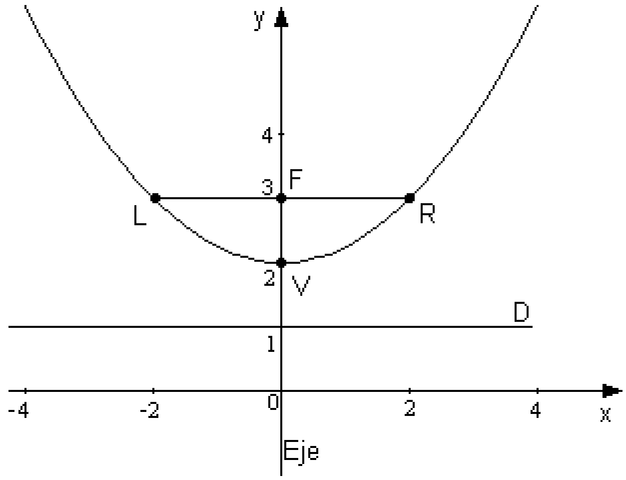
1) $x^2+8x+6y+22=0$; $(x+4)^2=-6(y+1)$; $V(-4,-1)$; $p=\frac{3}{2}$; $2p=3$; $F\left(-4,-\frac{5}{2}\right)$; $L\left(-7,-\frac{5}{2}\right)$; $R\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$; Ec. eje: $x=-4$; Ec. "D": $y=\frac{1}{2}$; Intersección con el eje "y": si $x=0$ $\left(0,-\frac{11}{3}\right)$; punto simétrico $\left(-8,-\frac{11}{3}\right)$



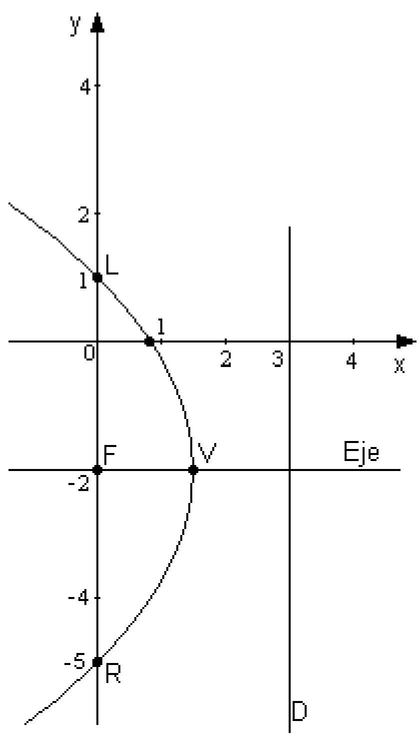
2) $x^2+4x+4=0$; Como $E=0$, la parábola degenera en las 2 rectas paralelas:
$(l_1)\ldots \quad x=-2+2\sqrt{3}$
$(l_2)\ldots \quad x=-2-2\sqrt{3}$



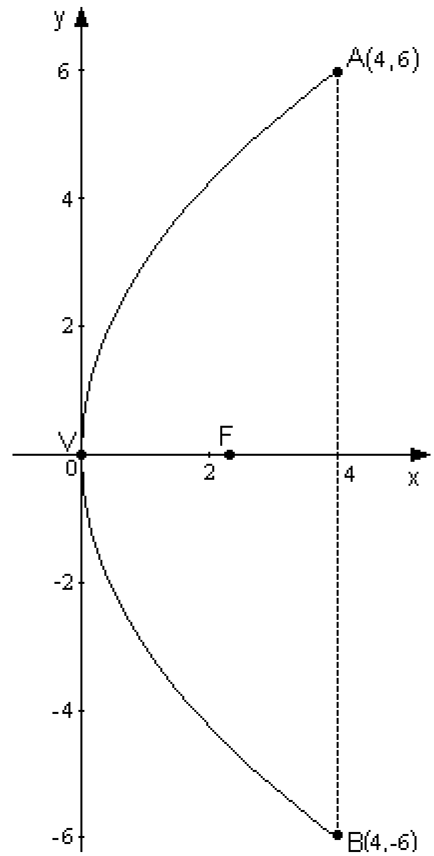
3) $x^2-4y+8=0$; $x^2=4(y-2)$; $V(0,2)$; $p=1$; $2p=2$; $F(0,3)$; $L(-2,3)$; $R(2,3)$
Ec. eje: $x=0$; Ec. "D": $y=1$



4) $y^2+4y+6x-5=0$; $(y+2)^2=-6\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$; $V\left(\dfrac{3}{2},-2\right)$; $p=\dfrac{3}{2}$; $2p=3$; $F(0,-2)$ $L(0,1)$ $R(0,-5)$; Ec. eje: $y=-2$; Ec. "D": $x=3$; Intersección con el eje "x": si $x=0$; $\left(\dfrac{5}{6},0\right)$



5) $y^2 = 9x$; $p = \frac{9}{4}$; $F\left(\frac{9}{4},0\right)$; El foco está a $2.25\,m$ del vértice.



9.4. ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA BAJO CIERTAS CONDICIONES, CON EJE PARALELO A UNO DE LOS EJES COORDENADOS

1) $V(-1,-3)$, $F(-2,-3)$; $(y+3)^2 = -4(x+1)$; $y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$

2) $V(1,-1)$, $P(3,1)$; $(y+1)^2 = 2(x-1)$; $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$

3) $L(-1,1)$, $R(-1,-5)$; $(y+2)^2 = 6\left(x+\frac{5}{2}\right)$; $y^2 - 6x + 4y - 11 = 0$

$$(y+2)^2 = -6\left(x-\frac{1}{2}\right) \; ; \; y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$$

4) $A(2,-1)$, $B(4,0)$ y $C(5,3)$; $\begin{cases} 2D - E + F = -4 \\ 4D \qquad + F = -16 \\ 5D + 3E + F = -25 \end{cases}$; $D = -\frac{27}{5}$; $E = -\frac{6}{5}$; $F = \frac{28}{5}$

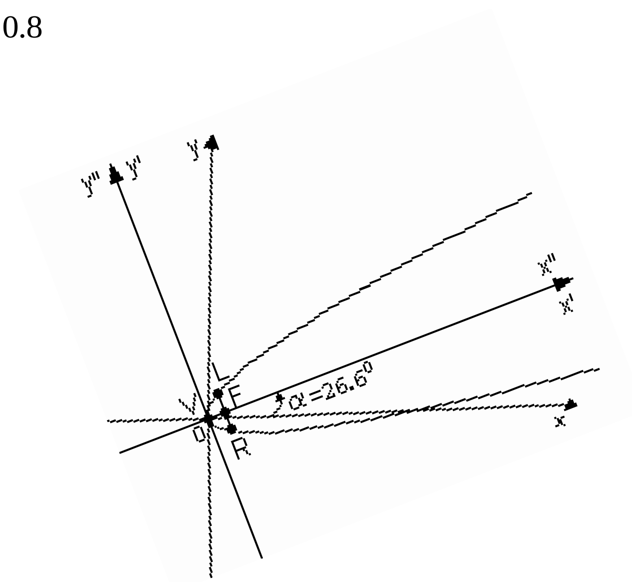
$5x^2 - 27x - 6y + 28 = 0$

5) $A(2,-1)$, $B(4,0)$ y $C(5,3)$; $\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$; $5x^2 - 27x - 6y + 28 = 0$

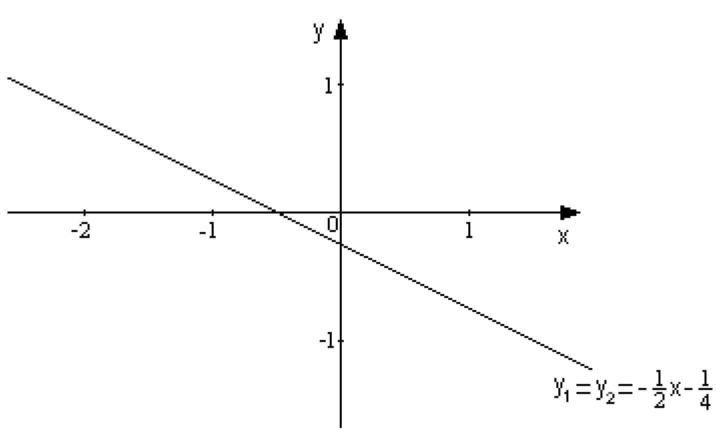
9.5. ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA CON EJE FOCAL OBLICUO RESPECTO A LOS EJES COORDENADOS

1) $x^2 - 4xy + 4y^2 - x = 0$; por el primer procedimiento, $\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$; $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$; $sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\alpha = 26.6^0$; $x = \frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}$; $y = \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}$; $\left(y' + \frac{1}{10\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{2}{2\sqrt{5}}\left(x' + \frac{\sqrt{5}}{200}\right)$; $\boxed{y''^2 = \frac{2}{5\sqrt{5}}x''}$

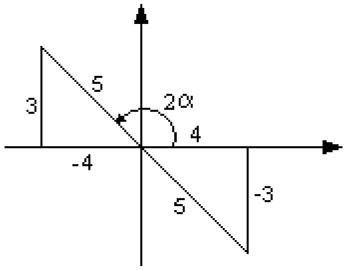
$p = \frac{1}{10\sqrt{5}} \approx 0.4$; $2p \approx 0.8$



2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y + \frac{1}{4} = 0$, por el segundo procedimiento, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. La parábola degenera en 2 rectas coincidentes.

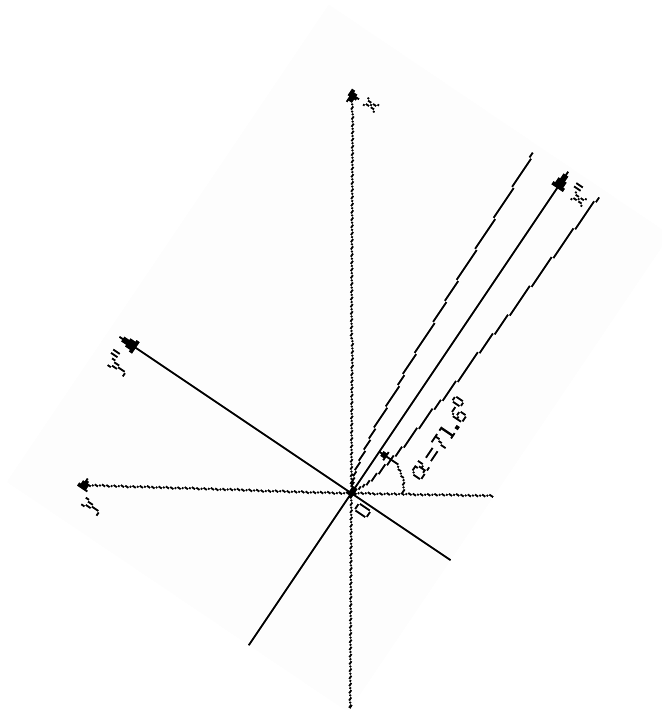


3) $9x^2 - 6xy + y^2 - x = 0$, por el primer procedimiento, $\tan 2\alpha = \frac{-3}{4}$; para que α sea agudo



$\cos 2\alpha = \frac{-4}{5}$; $sen\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\alpha = 71.6^0$; $x = \frac{x' - 3y'}{\sqrt{10}}$

$y = \frac{3x' + y'}{\sqrt{10}}$; $\left(y' + \frac{3}{20\sqrt{10}} \right)^2 = \frac{1}{10\sqrt{10}} \left(x' + \frac{9\sqrt{10}}{400} \right)$; $\boxed{y''^2 = \frac{1}{10\sqrt{10}} x''}$

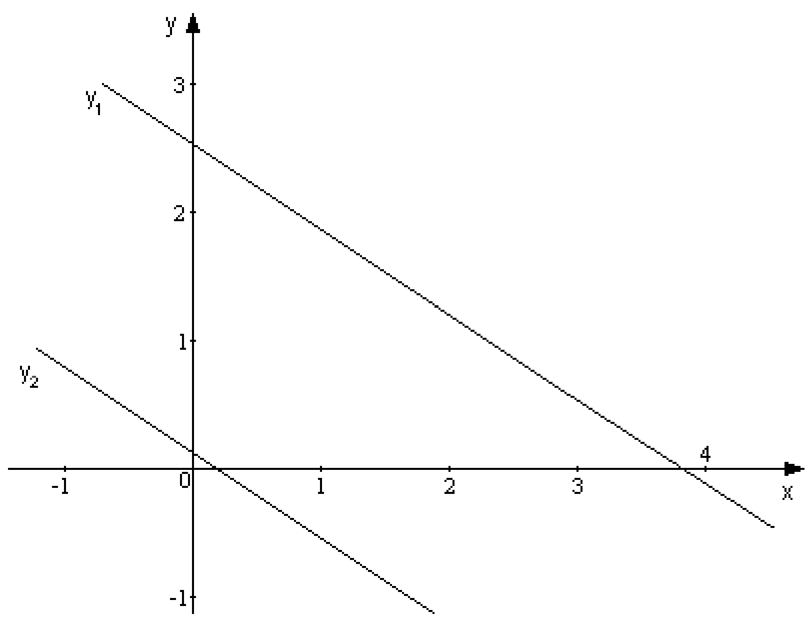


4) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 16x - 24y + 3 = 0$, por el segundo procedimiento,

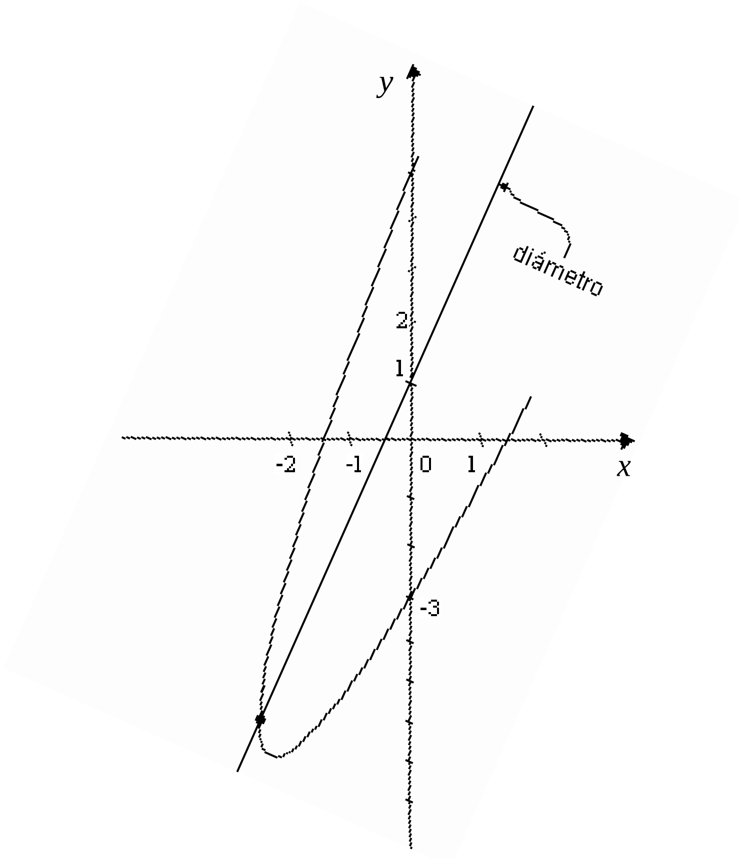
$$y_1 = -\frac{2}{3}x + \frac{4 + \sqrt{13}}{3}$$

$$y_2 = -\frac{2}{3}x + \frac{4 - \sqrt{13}}{3}$$

La parábola degenera en 2 rectas paralelas



5) $9x^2-6xy+y^2+x-2y-14=0$, por el segundo procedimiento, $y=3x+1\pm\sqrt{5}\sqrt{x+3}$



SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO X

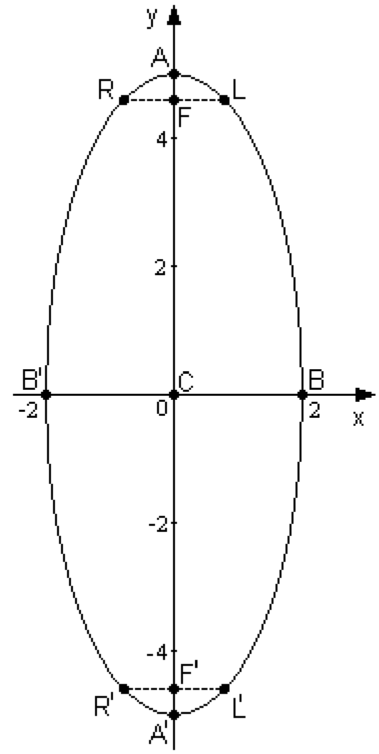
10.3.1. ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

1) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{4}=1$;

$a=5$; $b=2$; $c=\sqrt{21}$; $F\left(0,\sqrt{21}\right)$; $F'\left(0,-\sqrt{21}\right)$; $A(0,5)$

$A'(0,-5)$; $B(2,0)$; $B'(-2,0)$; $LR=\frac{8}{5}$; $L\left(\frac{4}{5},\sqrt{21}\right)$

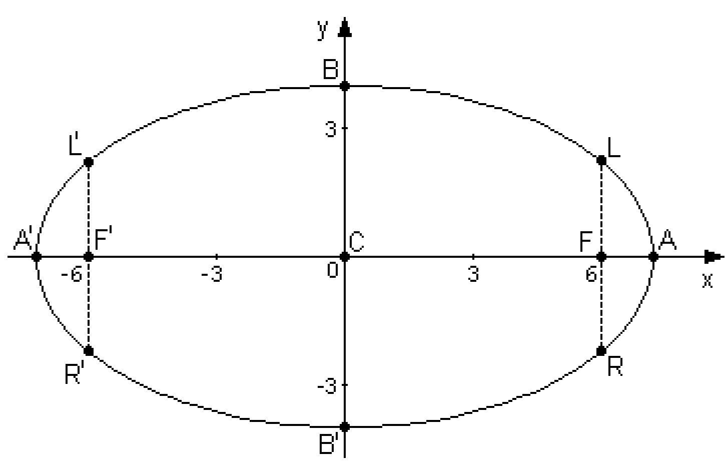
$R\left(-\frac{4}{5},\sqrt{21}\right)$; $L'\left(\frac{4}{5},-\sqrt{21}\right)$: $R'\left(-\frac{4}{5},-\sqrt{21}\right)$; $e=\frac{\sqrt{21}}{5}$



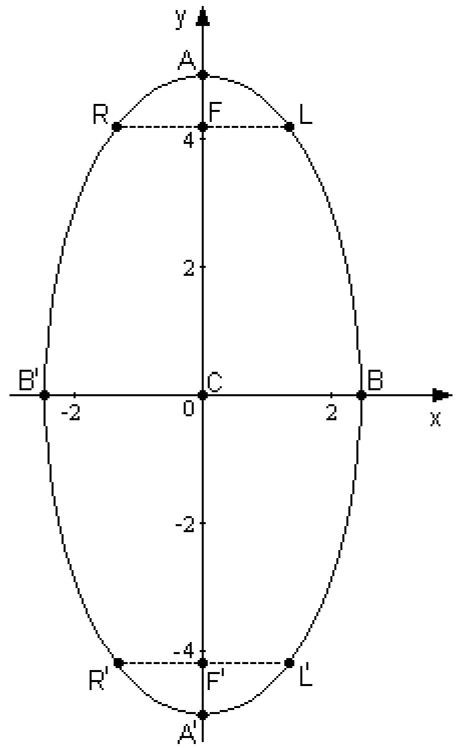
2) $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{16}=1$;

$a=\sqrt{52}$; $b=4$; $c=6$; $F'(-6,0)$; $F(6,0)$; $B(0,4)$; $B'(0,-4)$; $LR=\frac{16}{\sqrt{13}}$; $L\left(6,\frac{8}{\sqrt{13}}\right)$; $R\left(6,-\frac{8}{\sqrt{13}}\right)$

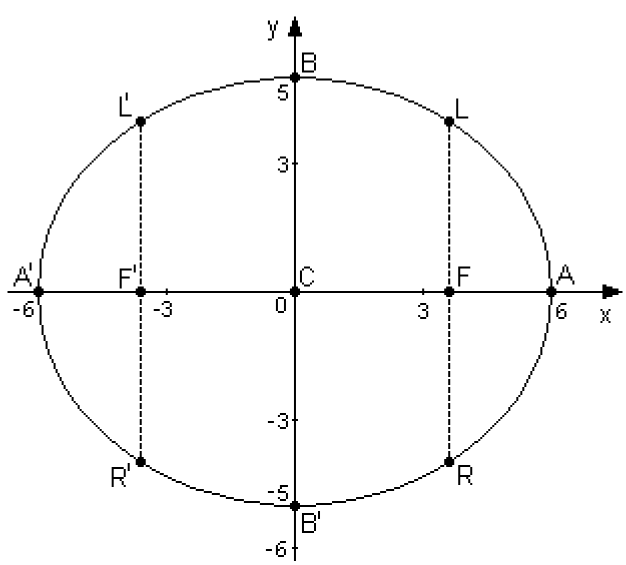
$L'\left(-6,\frac{8}{\sqrt{13}}\right)$; $R'\left(-6,-\frac{8}{\sqrt{13}}\right)$; $e=\frac{3}{\sqrt{13}}$; $A\left(2\sqrt{13},0\right)$; $A'\left(-2\sqrt{13},0\right)$.



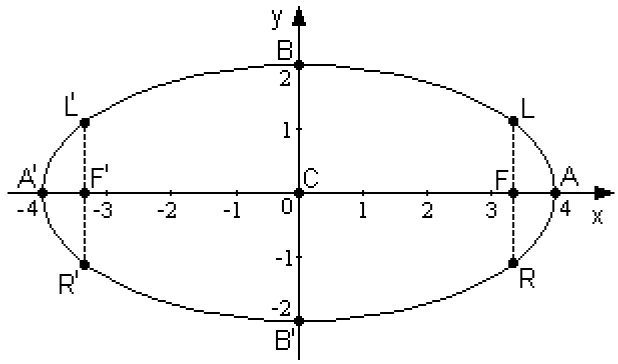
3) $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{6}=1$; $a=5$; $b=\sqrt{6}$; $c=\sqrt{19}$; $F\left(0,\sqrt{19}\right)$; $F'\left(0,-\sqrt{19}\right)$; $A(0,5)$; $A'(0,-5)$; $B\left(\sqrt{6},0\right)$ $B'\left(-\sqrt{6},0\right)$; $LR=\dfrac{12}{5}$; $L\left(\dfrac{6}{5},\sqrt{19}\right)$; $R\left(-\dfrac{6}{5},\sqrt{19}\right)$; $L'\left(\dfrac{6}{5},-\sqrt{19}\right)$; $R'\left(-\dfrac{6}{5},-\sqrt{19}\right)$; $e=\dfrac{\sqrt{19}}{5}$.



4) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{25}=1$; $a=6$; $b=5$; $c=\sqrt{11}$; $F\left(\sqrt{11},0\right)$; $F'\left(-\sqrt{11},0\right)$; $A(6,0)$; $A'(-6,0)$; $B(0,5)$; $B'(0,-5)$; $LR=\dfrac{25}{3}$; $L\left(\sqrt{11},\dfrac{25}{6}\right)$; $R\left(\sqrt{11},-\dfrac{25}{6}\right)$; $L'\left(-\sqrt{11},\dfrac{25}{6}\right)$; $R'\left(-\sqrt{11},-\dfrac{25}{6}\right)$; $e=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$.



5) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$; $a=4$; $b=2$; $c=2\sqrt{3}$; $F\left(2\sqrt{3},0\right)$; $F'\left(-2\sqrt{3},0\right)$; $A(4,0)$; $A'(-4,0)$; $B(0,2)$; $B'(0,-2)$; $LR=2$; $L\left(2\sqrt{3},1\right)$; $R\left(2\sqrt{3},-1\right)$; $L'\left(-2\sqrt{3},1\right)$; $R'\left(-2\sqrt{3},-1\right)$; $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



10.3.2. ELIPSE CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN Y EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

1) $\dfrac{(y-6)^2}{36}+\dfrac{(x+3)^2}{16}=1$; $a=6$; $b=4$; $c=2\sqrt{5}$; $C(-3,6)$

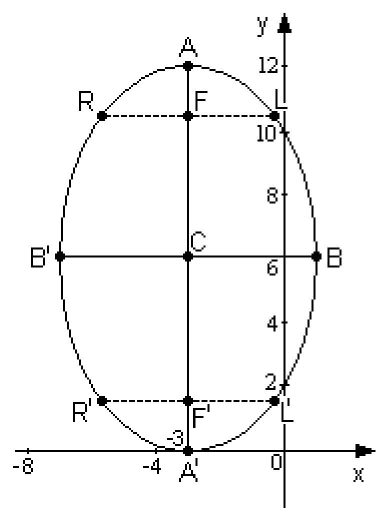
$A(-3,12)$; $A'(-3,0)$; $B(1,6)$; $B'(-7,6)$; $F\left(-3,6+2\sqrt{5}\right)$

$F'\left(-3,6-2\sqrt{5}\right)$; $L\left(-\dfrac{1}{3},6+2\sqrt{5}\right)$; $R\left(-\dfrac{17}{3},6+2\sqrt{5}\right)$

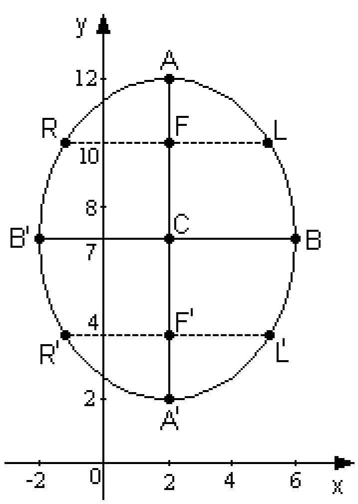
$L'\left(-\dfrac{1}{3},6-2\sqrt{5}\right)$; $R'\left(-\dfrac{17}{3},6-2\sqrt{5}\right)$; $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\approx 0.75$

$LR=\dfrac{16}{3}$; Ec. eje mayor: $x=-3$

Ec. eje menor: $y=6$



2)



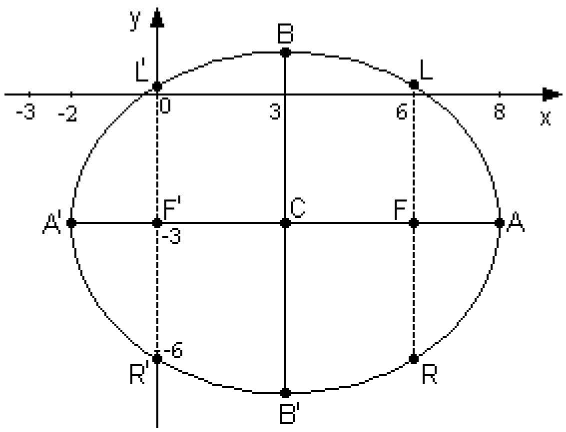
$F'(2,4)$; $F(2,10)$; $A(2,12)$; $a=5$; $b=4$; $c=3$; $C(2,7)$

$A'(2,2)$; $B(6,7)$; $B'(-2,7)$; $L\left(\dfrac{26}{5},10\right)$; $R\left(-\dfrac{6}{5},10\right)$; $L'\left(\dfrac{26}{5},4\right)$

$R'\left(-\dfrac{6}{5},4\right)$; $e=\dfrac{3}{5}=0.6$; $LR=\dfrac{32}{5}$; Ec. eje mayor: $x=2$

Ec. eje menor: $y=7$; Ec. elipse: $\dfrac{(y-7)^2}{25}+\dfrac{(x-2)^2}{16}=1$

3) $A'(-2,-3)$; $A(8,-3)$; $LR=\frac{32}{5}$; $a=5$; $b=4$; $c=3$; $C(3,-3)$; $B(3,1)$; $B'(3,-7)$; $F(6,-3)$



$F'(0,-3)$; $L\left(6,\frac{1}{5}\right)$; $R\left(6,-\frac{31}{5}\right)$; $L'\left(0,\frac{1}{5}\right)$

$R'\left(0,-\frac{31}{5}\right)$; $e=\frac{3}{5}=0.6$; $LR=\frac{32}{5}$

Ec. eje mayor: $y=-3$

Ec. eje menor: $x=3$

Ec. elipse: $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

4) $C(1,-4)$; $F(1,6)$; $B'(-2,-4)$; $a=\sqrt{109}$; $b=3$; $c=10$; $A\left(1,-4+\sqrt{109}\right)$; $A'\left(1,-4-\sqrt{109}\right)$

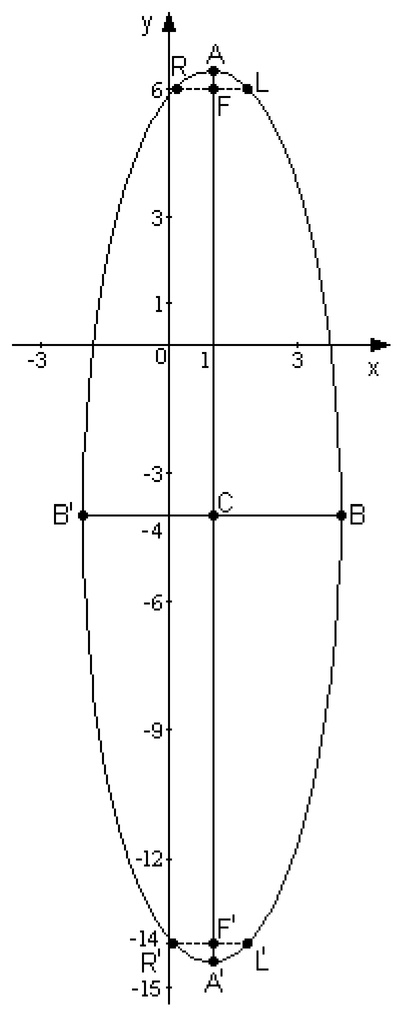
$B(4,-4)$; $F'(1,-14)$; $L\left(1+\frac{9}{\sqrt{109}},6\right)$; $R\left(1-\frac{9}{\sqrt{109}},6\right)$

$L'\left(1+\frac{9}{\sqrt{109}},-14\right)$; $R'\left(1-\frac{9}{\sqrt{109}},-14\right)$; $e=\frac{10}{\sqrt{109}}\approx 0.96$

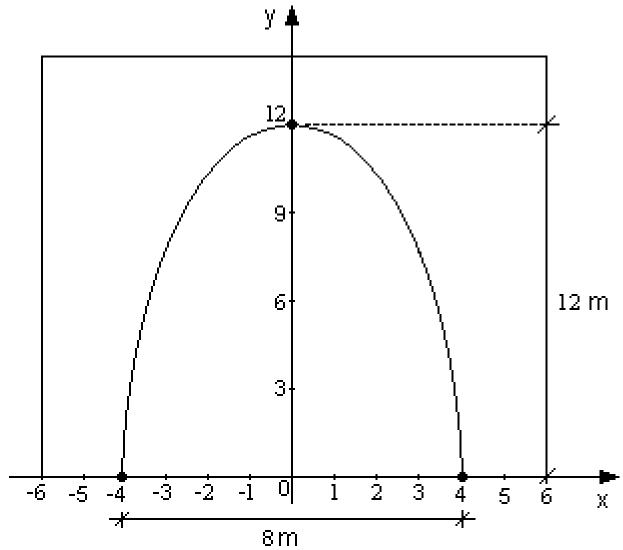
$LR=\frac{18}{\sqrt{109}}$; Ec. eje mayor: $x=1$

Ec. eje menor: $y=-4$

Ec. elipse: $\frac{(y+4)^2}{109}+\frac{(x-1)^2}{9}=1$



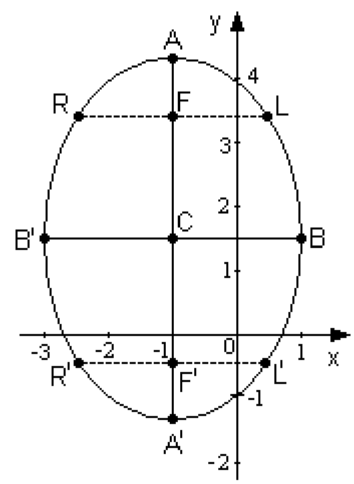
5) $\frac{y^2}{144}+\frac{x^2}{16}=1$



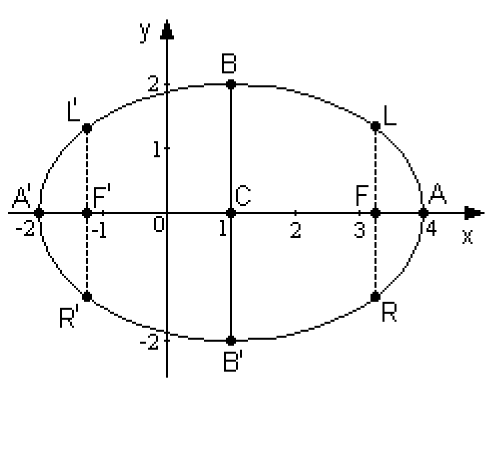
10.4. FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

1) $8x^2+4y^2+16x-12y-15=0$; $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{8}=1$

$C\left(-1,\frac{3}{2}\right)$; $a=2\sqrt{2}$; $b=2$; $c=2$; $e=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.71$; $LR=2\sqrt{2}$

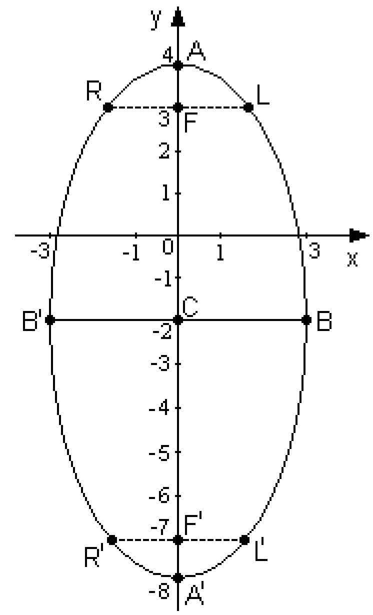


2) $4x^2+9y^2-8x-32=0$; $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; $C(1,0)$; $a=3$; $b=2$; $c=\sqrt{5}$; $e=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0.75$; $LR=\frac{8}{3}$



3) $36x^2+9y^2+36y-288=0$; $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{36}=1$; $C(0,-2)$

$a=6$; $b=3$; $c=3\sqrt{3}$; $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.87$; $LR=3$

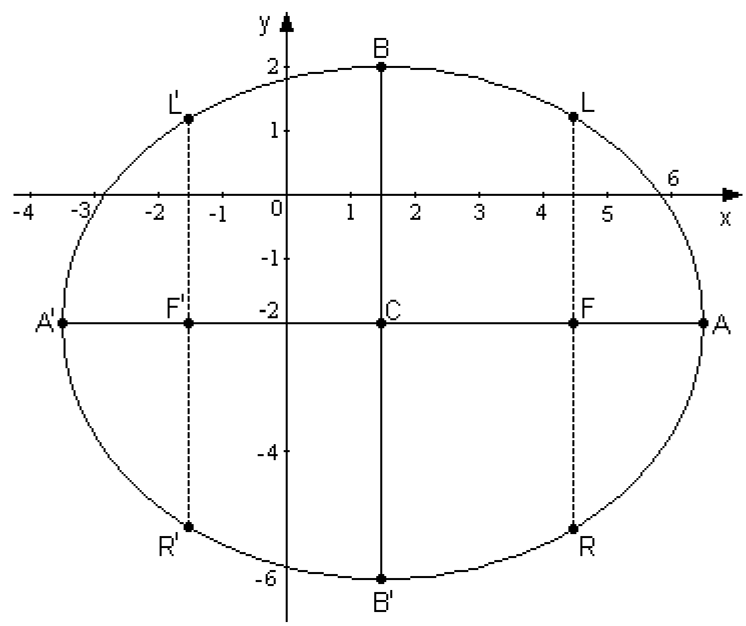


4) $16x^2+25y^2-48x+100y-264=0$;

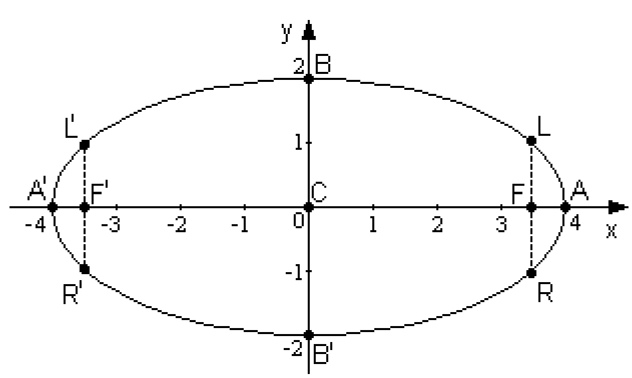
$\dfrac{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$; $C\left(\dfrac{3}{2},-2\right)$

$a=5$; $b=4$; $c=3$; $e=\dfrac{3}{5}=0.6$

$LR=\dfrac{32}{5}$



5) $4x^2+16y^2-64=0$; $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$; $C(0,0)$; $a=4$; $b=2$; $c=2\sqrt{3}$; $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.9$; $LR=2$



SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO XI

11.3. FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

1) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$; $a=3$; $b=2$; $c=\sqrt{13}$; $\frac{b^2}{a}=\frac{4}{3}$

$C(0,0)$; $A(0,3)$; $B(2,0)$; $F\left(0,\sqrt{13}\right)$; $L\left(\frac{4}{3},\sqrt{13}\right)$

$A'(0,-3)$; $B'(-2,0)$; $F'\left(0,-\sqrt{13}\right)$; $L'\left(\frac{4}{3},-\sqrt{13}\right)$

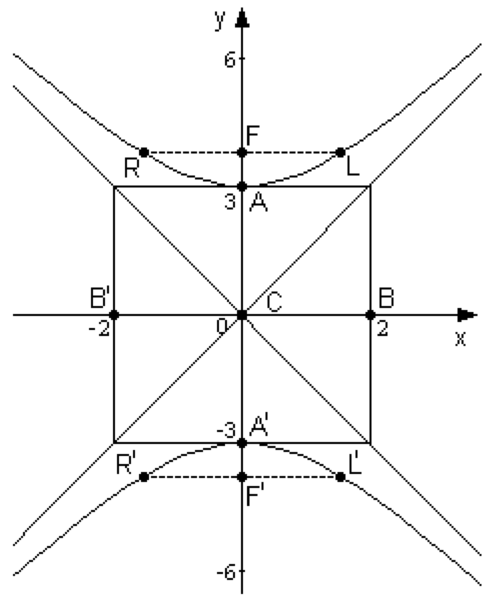
$R\left(-\frac{4}{3},\sqrt{13}\right)$; $R'\left(-\frac{4}{3},-\sqrt{13}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\frac{3}{2}x$; $y=-\frac{3}{2}x$

Ecuación eje transverso: $x=0$ (eje y).

Ecuación eje conjugado: $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$



2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; $a=5$; $b=4$; $c=\sqrt{41}$; $\frac{b^2}{a}=\frac{16}{5}$; $C(0,0)$; $A(5,0)$; $B(0,4)$; $F\left(\sqrt{41},0\right)$; $L\left(\sqrt{41},\frac{16}{5}\right)$

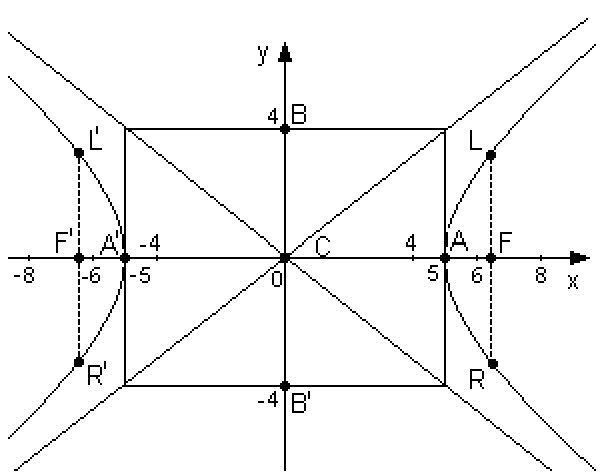
$A'(-5,0)$; $B'(0,-4)$; $F'\left(-\sqrt{41},0\right)$; $L'\left(-\sqrt{41},\frac{16}{5}\right)$, $R\left(\sqrt{41},-\frac{16}{5}\right)$; $R'\left(-\sqrt{41},-\frac{16}{5}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\frac{4}{5}x$; $y=-\frac{4}{5}x$

Ecuación eje transverso: $y=0$ (eje x).

Ecuación eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{41}}{5}$



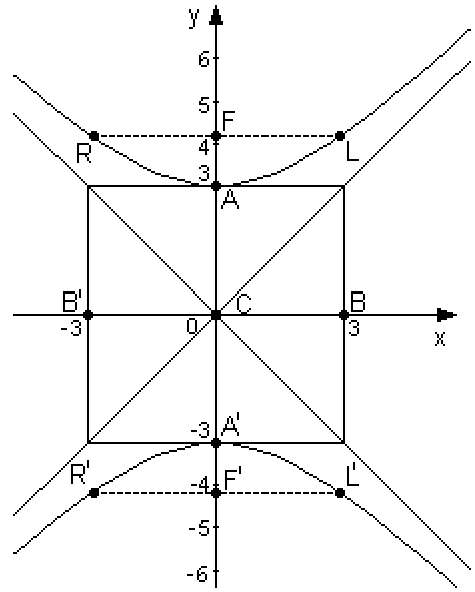
3) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{9}=1$; $a=b=3$; $c=3\sqrt{2}$; $\frac{b^2}{a}=3$; $C(0,0)$; $A(0,3)$; $B(3,0)$; $F\left(0,3\sqrt{2}\right)$; $L\left(3,3\sqrt{2}\right)$
$A'(0,-3)$; $B'(-3,0)$; $F'\left(0,-3\sqrt{2}\right)$; $L'\left(3,-3\sqrt{2}\right)$, $R\left(-3,3\sqrt{2}\right)$; $R'\left(-3,-3\sqrt{2}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=x$; $y=-x$

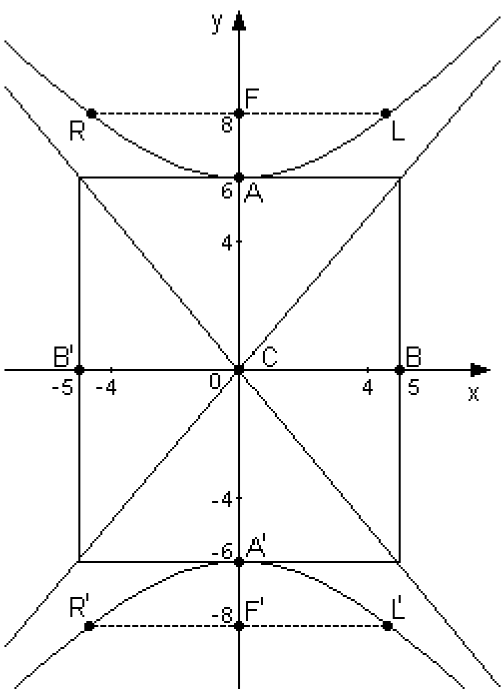
Ecuación eje transverso: $x=0$ (eje y).

Ecuación eje conjugado: $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\sqrt{2}$



4) Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, $a=6$, $e=\frac{4}{3}$ y el eje focal sobre el eje y.



$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{28}=1$; $a=6$; $b=2\sqrt{7}$; $c=8$; $\frac{b^2}{a}=\frac{14}{3}$; $C(0,0)$

$A(0,6)$; $B\left(2\sqrt{7},0\right)$; $F(0,8)$; $L\left(\frac{14}{3},8\right)$

$A'(0,-6)$; $B'\left(-2\sqrt{7},0\right)$; $F'(0,-8)$; $L'\left(\frac{14}{3},-8\right)$, $R\left(-\frac{14}{3},8\right)$

$R'\left(-\frac{14}{3},-8\right)$

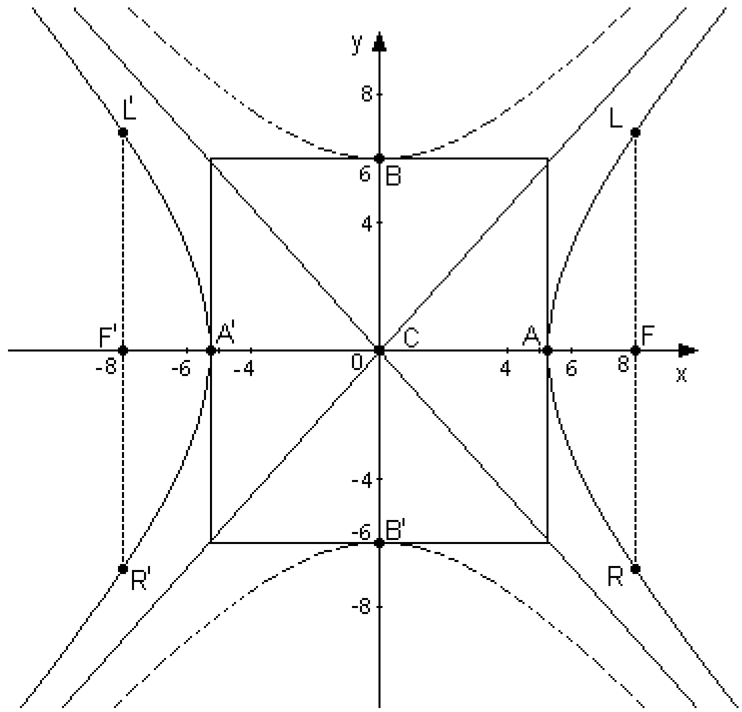
Ecuación asíntotas: $y=\frac{3}{\sqrt{7}}x$; $y=-\frac{3}{\sqrt{7}}x$

Ecuación eje transverso: $x=0$ (eje y).

Ecuación eje conjugado: $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\frac{4}{3}$

5) Obtener la ecuación de la hipérbola conjugada de $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{28}=1$, sus elementos y bosquejar su gráfica.



$\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$; $a=2\sqrt{7}$; $b=6$; $c=8$

$\frac{b^2}{a}=\frac{18}{\sqrt{7}}$; $C(0,0)$; $A(2\sqrt{7},0)$; $B(0,6)$

$F(8,0)$; $L\left(8,\frac{18}{\sqrt{7}}\right)$

$A'(-2\sqrt{7},0)$; $B'(0,-6)$; $F'(-8,0)$

$L'\left(-8,\frac{18}{\sqrt{7}}\right)$, $R\left(8,-\frac{18}{\sqrt{7}}\right)$

$R'\left(-8,-\frac{18}{\sqrt{7}}\right)$

Ecuación asíntotas:

$y=\frac{3}{\sqrt{7}}x$; $y=-\frac{3}{\sqrt{7}}x$

Ecuación eje transverso: $y=0$ (eje x).

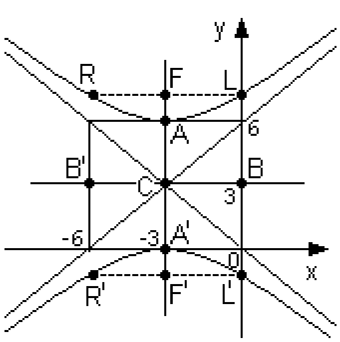
Ecuación eje conjugado: $x=0$ (eje y).

Excentricidad: $e=\frac{4}{\sqrt{7}}$

11.4. FORMA ORDINARIA DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN Y EJE FOCAL PARALELO A ALGUNO DE LOS EJES COORDENADOS

1) $\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x+3)^2}{9}=1$ (hipérbola equilátera); $a=b=3$; $c=3\sqrt{2}$; $\frac{b^2}{a}=3$

$C(-3,3)$; $A(-3,6)$; $B(0,3)$; $F(-3,3+3\sqrt{2})$; $L(0,3+3\sqrt{2})$



$A'(-3,0)$; $B'(-6,3)$; $F'(-3,3-3\sqrt{2})$; $L'(0,3-3\sqrt{2})$

$R(-6,3+3\sqrt{2})$; $R'(-6,3-3\sqrt{2})$

Ecuación asíntotas: $y=x+6$; $y=-x$

Ecuación eje transverso: $x=-3$

Ecuación eje conjugado: $y=3$

Excentricidad: $e=\sqrt{2}$

2) $\dfrac{(x-2)^2}{36}-\dfrac{(y+4)^2}{9}=1$; $a=6$; $b=3$; $c=3\sqrt{5}$; $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{3}{2}$; $C(2,-4)$; $A(8,-4)$; $B(2,-1)$

$F\left(2+3\sqrt{5},-4\right)$; $L\left(2+3\sqrt{5},-\dfrac{5}{2}\right)$

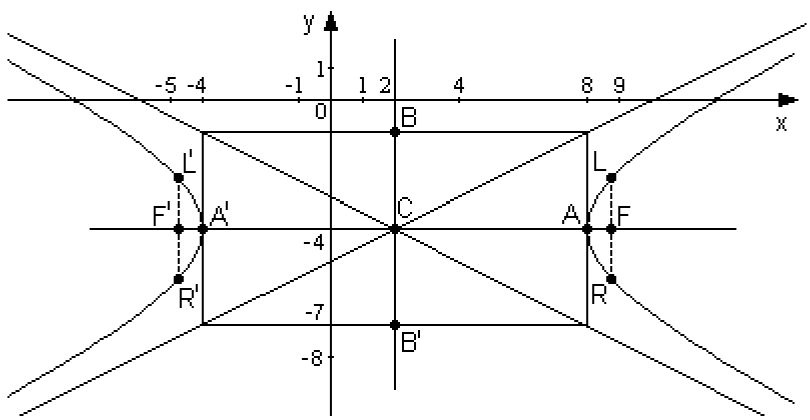
$A'(-4,-4)$; $B'(2,-7)$; $F'\left(2-3\sqrt{5},-4\right)$; $L'\left(2-3\sqrt{5},-\dfrac{5}{2}\right)$, $R\left(2+3\sqrt{5},-\dfrac{11}{2}\right)$; $R'\left(2-3\sqrt{5},-\dfrac{11}{2}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\dfrac{1}{2}x-5$; $y=-\dfrac{1}{2}x-3$

Ecuación eje transverso: $y=-4$

Ecuación eje conjugado: $x=2$

Excentricidad: $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$



3) $\dfrac{(x-5)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$; $a=2$; $b=2\sqrt{3}$; $c=4$; $\dfrac{b^2}{a}=6$; $C(5,0)$; $A(7,0)$; $B\left(5,2\sqrt{3}\right)$ $F(9,0)$; $L(9,6)$

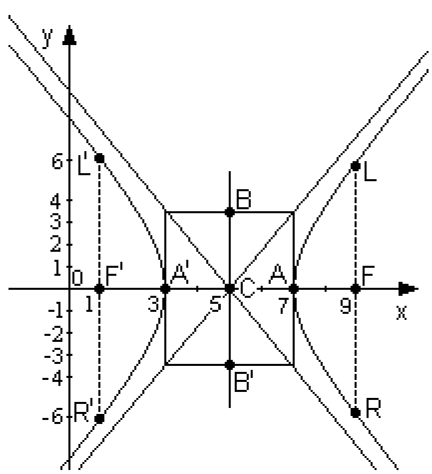
$A'(3,0)$; $B'\left(5,-2\sqrt{3}\right)$; $F'(1,0)$; $L'(1,6)$, $R(9,-6)$; $R'(1,-6)$

Ecuación asíntotas: $y=\sqrt{3}x-5\sqrt{3}$; $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$

Ecuación eje transverso: $y=0$ (eje x)

Ecuación eje conjugado: $x=5$

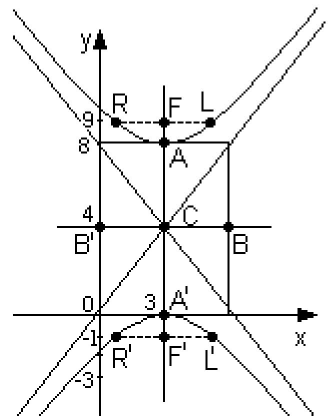
Excentricidad: $e=2$



4) y **5)** $\frac{(y-4)^2}{16}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$; $CB=b=3$; $L\left(h+\frac{b^2}{a},k+c\right)=\left(\frac{21}{4},9\right)$; $a=4$; $c=5$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$

$C(3,4)$; $A(3,8)$; $B(6,4)$ $F(3,9)$; $L\left(\frac{21}{4},9\right)$; $A'(3,0)$

$B'(0,4)$; $F'(3,-1)$; $L'\left(\frac{21}{4},-1\right)$, $R\left(\frac{3}{4},9\right)$; $R'\left(\frac{3}{4},-1\right)$



Ecuación asíntotas: $y=\frac{4}{3}x$; $y=-\frac{4}{3}x+8$

Ecuación eje transverso: $x=3$
Ecuación eje conjugado: $y=4$

Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$

11.5. FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

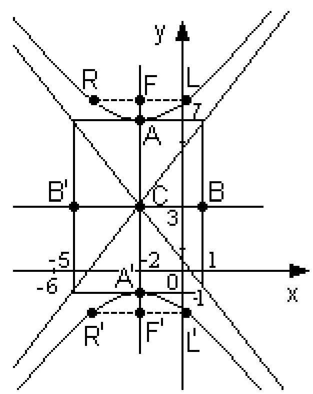
1) $9y^2-16x^2-64x+54y-127=0$

$\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$; $a=4$; $b=3$; $c=5$; $\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$

$C(-2,3)$; $A(-2,7)$; $B(1,3)$ $F(-2,8)$; $L\left(\frac{1}{4},8\right)$

$A'(-2,-1)$; $B'(-5,3)$; $F'(-2,-2)$; $L'\left(\frac{1}{4},-2\right)$

$R\left(-\frac{17}{4},8\right)$; $R'\left(-\frac{17}{4},-2\right)$



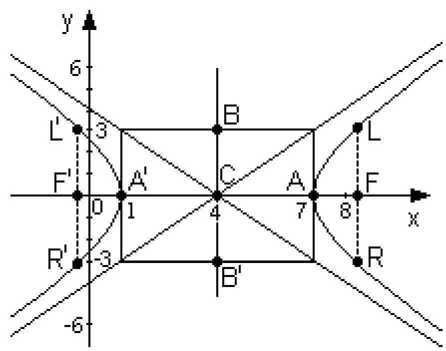
Ecuación asíntotas: $y=\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$; $y=-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$

Ecuación eje transverso: $x=2$
Ecuación eje conjugado: $y=3$

Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$

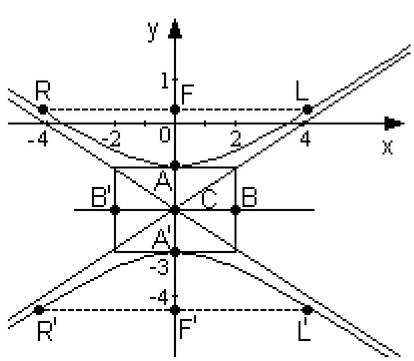
2) $3x^2-3y^2-24x+21=0$

$\frac{(x-4)^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$; $a=b=3$; $c=3\sqrt{2}$; $\frac{b^2}{a}=3$; $C(4,0)$; $A(7,0)$; $B(4,3)$ $F(4+3\sqrt{2},0)$; $L(4+3\sqrt{2},3)$
$A'(1,0)$; $B'(4,-3)$; $F'(4-3\sqrt{2},0)$; $L'(4-3\sqrt{2},3)$, $R(4+3\sqrt{2},-3)$; $R'(4-3\sqrt{2},-3)$
Ecuación asíntotas: $y=x-4$; $y=-x+4$
Ecuación eje transverso: $y=0$ (eje x).
Ecuación eje conjugado: $x=4$
Excentricidad: $e=\sqrt{2}$



3) $4y^2-x^2+16y+12=0$

$\frac{(y+2)^2}{1}-\frac{x^2}{4}=1$; $a=1$; $b=2$; $c=\sqrt{5}$; $\frac{b^2}{a}=4$; $C(0,-2)$; $A(0,1)$; $B(2,-2)$ $F(0,-2+\sqrt{5})$;
$L(4,-2+\sqrt{5})$; $A'(0,-3)$; $B'(-2,-2)$; $F'(0,-2-\sqrt{5})$; $L'(4,-2-\sqrt{5})$, $R(-4,-2+\sqrt{5})$; $R'(-4,-2-\sqrt{5})$
Ecuación asíntotas: $y=\frac{1}{2}x-2$; $y=-\frac{1}{2}x-2$
Ecuación eje transverso: $x=0$ (eje y).
Ecuación eje conjugado: $y=-2$
Excentricidad: $e=\sqrt{5}$



4) $x^2-2y^2-8x+8y=0$

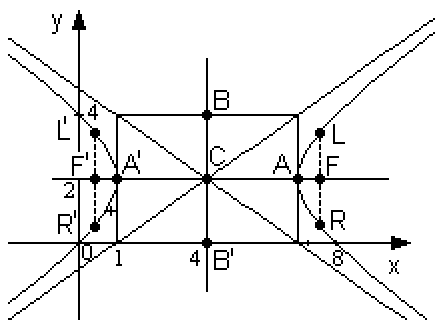
$\dfrac{(x-4)^2}{8}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$; $a=2\sqrt{2}$; $b=2$; $c=2\sqrt{3}$; $\dfrac{b^2}{a}=\sqrt{2}$; $C(4,2)$; $A\left(4+2\sqrt{2},2\right)$; $B(4,4)$ $F\left(4+2\sqrt{3},2\right)$; $L\left(4+2\sqrt{3},2+\sqrt{2}\right)$; $A'\left(4-2\sqrt{2},2\right)$; $B'(4,0)$; $F'\left(4-2\sqrt{3},2\right)$; $L'\left(4-2\sqrt{3},2+\sqrt{2}\right)$, $R\left(4+2\sqrt{3},2-\sqrt{2}\right)$; $R'\left(4-2\sqrt{3},2-\sqrt{2}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-2\sqrt{2}+2$; $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}+2$

Ecuación eje transverso: $y=2$

Ecuación eje conjugado: $x=4$

Excentricidad: $e=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$



5) $4y^2-x^2-4=0$

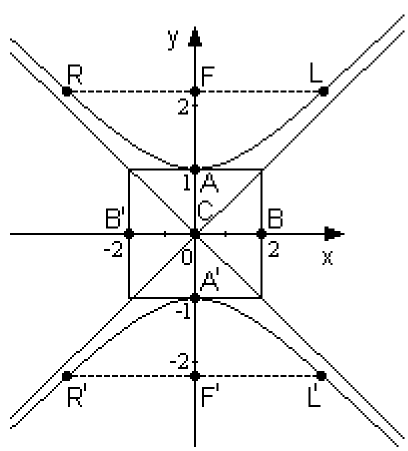
$\dfrac{y^2}{1}-\dfrac{x^2}{4}=1$; $a=1$; $b=2$; $c=\sqrt{5}$; $\dfrac{b^2}{a}=4$; $C(0,0)$; $A(0,1)$; $B(2,0)$ $F\left(0,\sqrt{5}\right)$; $L\left(4,\sqrt{5}\right)$; $A'(0,-1)$; $B'(-2,0)$; $F'\left(0,-\sqrt{5}\right)$; $L'\left(4,-\sqrt{5}\right)$, $R\left(-4,\sqrt{5}\right)$; $R'\left(-4,-\sqrt{5}\right)$

Ecuación asíntotas: $y=\dfrac{1}{2}x$; $y=-\dfrac{1}{2}x$

Ecuación eje transverso: $x=0$ (eje y).

Ecuación eje conjugado: $y=0$ (eje x).

Excentricidad: $e=\sqrt{5}$



SOLUCIÓN DEL AUTODIAGNÓSTICO DE ANTECEDENTES PARA ESTUDIANTES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

1	a	b	~~c~~	d
2	~~a~~	b	c	d
3	a	~~b~~	c	d
4	a	b	c	~~d~~
5	a	b	c	~~d~~
6	~~a~~	b	c	d
7	~~a~~	b	c	d
8	a	b	c	~~d~~
9	a	b	~~c~~	d
10	a	~~b~~	c	d
11	a	b	c	~~d~~
12	~~a~~	b	c	d
13	a	b	~~c~~	d
14	a	~~b~~	c	d
15	a	~~b~~	c	d
16	~~a~~	b	c	d
17	~~a~~	b	c	d
18	a	b	~~c~~	d
19	a	b	c	~~d~~
20	a	b	~~c~~	d
21	a	b	c	~~d~~
22	a	~~b~~	c	d
23	a	b	c	~~d~~
24	a	b	~~c~~	d
25	a	~~b~~	c	d

SOLUCIÓN DE LA AUTOEVALUACIÓN DE LOS CUATRO PRIMEROS CAPÍTULOS

1	a	b	c	~~d~~
2	a	b	c	~~d~~
3	~~a~~	b	c	d
4	a	b	~~c~~	d
5	a	~~b~~	c	d
6	a	b	c	~~d~~
7	a	~~b~~	c	d
8	a	b	c	~~d~~
9	~~a~~	b	c	d
10	~~a~~	b	c	d
11	a	b	~~c~~	d
12	~~a~~	b	c	d
13	~~a~~	b	c	d
14	a	b	~~c~~	d
15	a	b	c	~~d~~
16	a	b	~~c~~	d
17	~~a~~	b	c	d
18	~~a~~	b	c	d
19	a	b	~~c~~	d
20	a	~~b~~	c	d

SOLUCIÓN DE LA AUTOEVALUACIÓN DE LOS CAPÍTULOS DEL V AL VIII

1	a	~~b~~	c	d
2	a	b	c	~~d~~
3	a	~~b~~	c	d
4	~~a~~	b	c	d
5	a	b	~~c~~	d
6	a	b	c	~~d~~
7	a	~~b~~	c	d
8	a	b	~~c~~	d
9	~~a~~	b	c	d
10	a	b	~~c~~	d
11	a	b	c	~~d~~
12	~~a~~	b	c	d
13	a	~~b~~	c	d
14	a	b	c	~~d~~
15	a	~~b~~	c	d
16	~~a~~	b	c	d
17	a	b	c	~~d~~
18	a	~~b~~	c	d
19	a	b	~~c~~	d
20	~~a~~	b	c	d

SOLUCIÓN DE LA AUTOEVALUACIÓN DE LOS CAPÍTULOS DEL IX AL XI

1	a	b	~~c~~	d
2	a	b	c	~~d~~
3	~~a~~	b	c	d
4	a	~~b~~	c	d
5	a	b	c	~~d~~
6	a	b	~~c~~	d
7	~~a~~	b	c	d
8	a	b	c	~~d~~
9	~~a~~	b	c	d
10	a	~~b~~	c	d
11	a	~~b~~	c	d
12	~~a~~	b	c	d
13	a	b	~~c~~	d
14	~~a~~	b	c	d
15	a	b	c	~~d~~
16	a	~~b~~	c	d
17	~~a~~	b	c	d
18	a	b	~~c~~	d
19	a	b	c	~~d~~
20	~~a~~	b	c	d

APÉNDICE

“FÍSICA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA JUGANDO AL BILLAR”

La experiencia como docentes nos ha mostrado que los estudiantes de nivel medio superior se interesan más por aprender una materia cuando se les enseña como aplicarla en la solución de problemas de la vida real y aún más, cuando se trata de juegos que a estos les gusta practicar como es el billar. Esta propuesta didáctica, hace que los alumnos resuelvan sobre el papel un problema y luego lo lleven a la práctica. Permitiendo con esto, desarrollar su interés por aprender lo que se les enseña, logrando motivarlos al verificar que pueden llevar a la práctica los conocimientos impartidos como es la propuesta de este material por ejemplo.

El buscar aplicaciones de la vida cotidiana de lo que aprenden en clase los estudiantes nos va permitiendo a los profesores contestar la pregunta que siempre hacen: ¿para qué nos va a servir lo que nos enseñan?

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza y el aprendizaje de la Física y las Matemáticas, sabemos perfectamente que el utilizar aplicaciones reales cuando los profesores enseñamos estas materias en el Bachillerato, se genera un verdadero interés por parte de los estudiantes el saber como se puede aplicar lo que se estudia en la solución de problemas reales.

En este apéndice, se muestra precisamente que al jugar billar (carambola) sin efectos especiales en los golpes, estamos aplicando leyes elementales de la Física y conceptos básicos de la Geometría Analítica, los cuales nos permitirán aspirar a ser expertos en este juego.

OBJETIVOS

- ✓ La aplicación de esta propuesta didáctica, permitirá que el estudiante genere su propio conocimiento.
- ✓ Los resultados de esta propuesta permitirán una mejor motivación en los estudiantes por aprender Física y Matemáticas.
- ✓ El profesor tendrá mejores oportunidades de apropiarse del interés por aprender de los estudiantes.
- ✓ Los resultados en las evaluaciones mejorarán.
- ✓ Este tipo de información entrará en la clasificación de memoria a largo plazo.

MARCO DE REFERENCIA

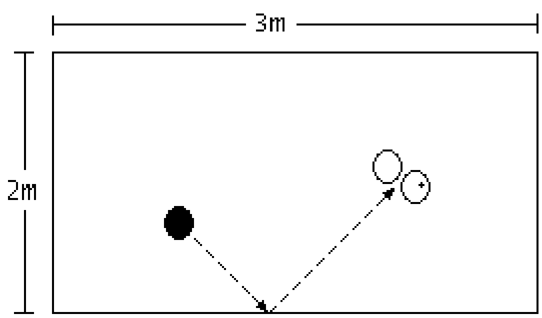
La información aplicable a situaciones de la vida cotidiana como en este caso del juego del billar (carambola), requiere de la Física saber que “el ángulo de incidencia de un rayo de luz es igual al ángulo de reflexión del mismo” aplicado a un espejo por ejemplo y de matemáticas se requiere saber que “la distancia más cercana entre dos puntos del plano es la recta que los une”, también saber que la ecuación de una recta puede expresarse como $y = mx + b$ y que la intersección entre dos rectas no paralelas en el plano, se puede obtener resolviendo sus ecuaciones como un sistema de ecuaciones simultáneas.

Iniciamos el desarrollo de esta propuesta didáctica citando la solución de algunos casos de posibles carambolas:

DESARROLLO

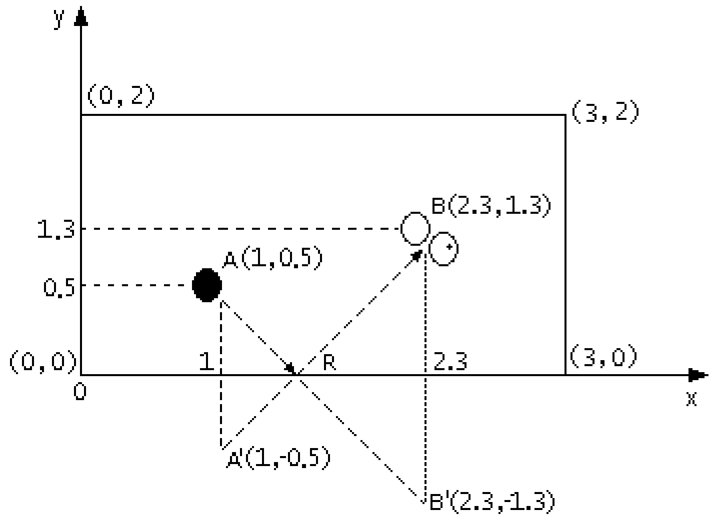
Carambola de una banda: (Caso 1)

Imaginemos que las dimensiones de una mesa de billar son $2\,[m]$ de ancho por $3\,[m]$ de largo y que la carambola que se desea realizar es como se muestra:



Solución

Colocar la mesa sobre un sistema de referencia (Plano Cartesiano) y asignémosle coordenadas a la ubicación de las bolas, si no hubiera banda inferior, la bola seguirá hasta B’ (simétrico de B respecto a esa banda según la ley de Física) y de acuerdo con las distancias se tiene que $d(A,R)+d(R,B)=d(A,R)+d(R,B')=d(A',R)+d(R,B)$ que será la distancia mínima cuando A,R y B' estén alineados, en cuyo caso también lo estarán A',R y B.



La solución del problema es encontrar las coordenadas del punto R que es donde deberá pegar la bola (sin efecto) para lograr la carambola.

Se obtienen las ecuaciones de las rectas AB' y $A'B$ y se resuelven como un sistema de ecuaciones:

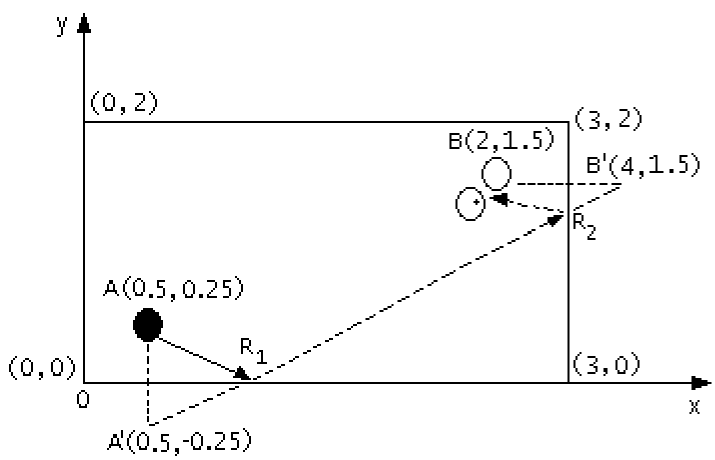
Recta AB': $y = -1.38x + 1.88$

Recta $A'B$: $y = 1.38x - 1.88$

Por lo tanto, el punto R tiene coordenadas $R(1.36,0)$.

Nota: Este mismo resultado se obtiene si se calcula la intersección de la recta AB' o la $A'B$ con el eje de las equis.

<u>Carambola de dos bandas:</u> (Caso 2)

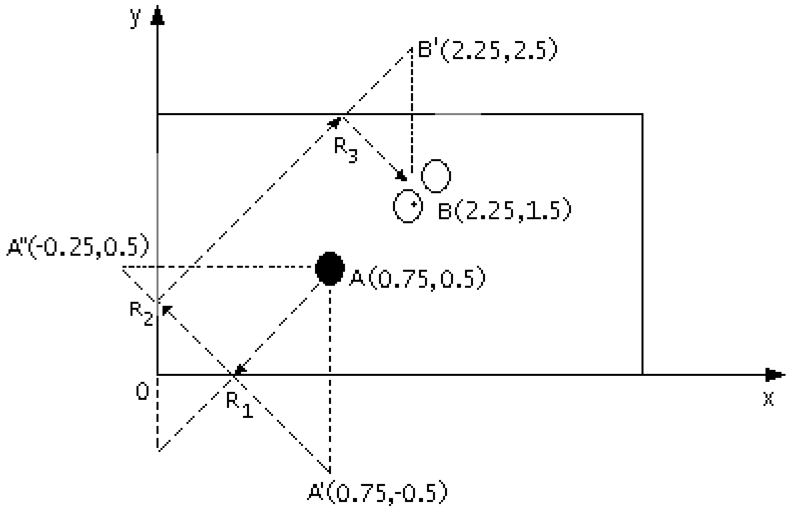


La solución de este problema será obtener las coordenadas de los puntos R_1 y R_2 y basta con el R_1.
Debe observarse que la solución no es única.

Ecuación de la recta $A'B'$: $y = 0.5x - 0.5$

Intersección $R_1(1,0), R_2(3,1)$

Carambola de tres bandas: (Caso 3)



La solución de este caso, será obtener las coordenadas de los puntos R_1, R_2 y R_3, pero sabemos que bastaría con las coordenadas del punto R_1.

Ecuación de la recta $A'A''$: $y = -x + 0.25$
Ecuación de la recta R_2B': $y = x + 0.25$

Intersecciones:

$R_1(0.25,0)$, $R_2(0,0.25)$, $R_1(1.75,2)$

CONCLUSIONES

De acuerdo con los objetivos planteados, el uso de este tipo de propuestas didácticas, al estudiante le permite generar su propio conocimiento, haciéndolo capaz de proponerse sus propios problemas y trabajar la solución de casos diferentes al de la muestra de este material habiendo un gran gama de posiciones diferentes de las bolas de billar y donde el profesor debe actuar de una manera orientadora muy superficial, con la finalidad de que el aprendiz (estudiante) logre desarrollar habilidades que le permitan elaborar estrategias de solución y puedan sentir gran satisfacción con lo aprendido al poder utilizarlo en la vida real, permitiéndoles conservar a largo plazo este tipo de conocimiento.

Al poner a prueba este tipo de materiales en la clase, corroboramos su eficacia y desde luego surgirán nuevas preguntas para reiniciar el proceso y la investigación para mejorarlos.

REFERENCIAS

1. Phillips., (1954). Geometría Analítica. México. UTEHA.

2. Borbolla, F. y Borbolla, L.,(1957). Problemas y Ejercicios de Geometría Analítica. México. UTEHA.

3. Oakley, C.O.,(1969). Geometría Analítica. México. CECSA

4. Wernick, W.,(1970). Geometría Analítica. México. Publicaciones Cultural.

5. Taylor, H.E. y Wade, T.L.,(1976). Geometría Analítica Bidimensional Subconjuntos del Plano. México. LIMUSA.

6. Middlemiss, R.R.,(1979). Geometría Analítica. México. Mc. GRAW-HILL

7. Kletenik, D.,(1986). Problemas de Geometría Analítica. URSS. Mir.

8. Zill, D.G.,(1987). Cálculo con Geometría Analítica. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

9. Lehmann, C.H.,(1989). Geometría Analítica. México. LIMUSA.

10. Filloy, E. y Hitt, F.,(1997). Geometría Analítica. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

11. Fuller,G. y Tarwater, D.,(1999). Geometría Analítica. México, Pearson Educación.

REFERENCIAS

1. Phillips., (1954). Geometría Analítica. México. UTEHA.

2. Borbolla, F. y Borbolla, L.,(1957). Problemas y Ejercicios de Geometría Analítica. México. UTEHA.

3. Oakley, C.O.,(1969). Geometría Analítica. México. CECSA

4. Wernick, W.,(1970). Geometría Analítica. México. Publicaciones Cultural.

5. Taylor, H.E. y Wade, T.L.,(1976). Geometría Analítica Bidimensional Subconjuntos del Plano. México. LIMUSA.

6. Middlemiss, R.R.,(1979). Geometría Analítica. México. Mc. GRAW-HILL

7. Kletenik, D.,(1986). Problemas de Geometría Analítica. URSS. Mir.

8. Zill, D.G.,(1987). Cálculo con Geometría Analítica. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

9. Lehmann, C.H.,(1989). Geometría Analítica. México. LIMUSA.

10. Filloy, E. y Hitt, F.,(1997). Geometría Analítica. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

11. Fuller,G. y Tarwater, D.,(1999). Geometría Analítica. México, Pearson Educación.